Type des orbites périodiques des flots associés à des lagrangiens optiques homogènes

Marie-Claude ARNAUD *

Résumé

Soit $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangien optique et homogène dans la fibre défini sur le fibré tangent d'une variété orientable de dimension n et γ un lacet régulier 1-périodique qui est un point critique non dégénéré d'indice p de l'action lagrangienne associée à L (il lui correspond alors un point périodique (x, v) du flot d'Euler-Lagrange (φ_t)). Soit T une transversale en (x, v) au champ de vecteurs dans la surface d'énergie et P l'application de premier retour de Poincaré dans cette transversale ; on montre alors que le nombre de Lefschetz pour P en (x, v) est $(-1)^{n-1+p}$. On en déduit que si $2n_h$ est le nombre de multiplicateurs de Floquet réels strictement positifs et non nuls, alors : $n_h = n - 1 + p \pmod 2$.

On explique comment déduire qu'un lagrangien optique quelconque défini sur le fibré tangent d'une variété orientable compacte de dimension paire de π_1 non trivial a une une orbite périodique qui est soit dégénérée, soit a un exposant de Floquet hyperbolique dans tout niveau d'énergie au dessus du niveau critique de Mañé.

Mots-clefs : Lagrangiens, orbites périodiques, multiplicateurs de Floquet, stabilité au sens de Lyapunov, géodésiques brisées, métrique de Jacobi.

Abstract

Let $L : TM \to \mathbb{R}$ be a Lagrangian function which is optical and homogeneous in the fiber of the tangent bundle of an n-dimensional orientable manifold M. Let γ be a 1-periodic loop which is a non degenerate critical point of the Lagrangian action with index p (there corresponds to γ a periodic point (x, v) of the Euler-Lagrange flow). Then the Lefschetz number of the Poincaré first return map in the energy hypersurface near (x, v) is $(-1)^{n-1-p}$, and thus if $2n_h$ is the

*EA 2151, Laboratoire d'Analyse non linéaire et Géométrie, UFR Sciences, Université d'Avignon, 33, rue Louis Pasteur, 84000 AVIGNON, France.email : Marie-Claude.Arnaud@univ-avignon.fr

number of real hyperbolic Floquet multipliers of (x, v) without reflection, then $n_h = n - 1 + p \pmod 2$.

Then we explain how to deduce from this result that every optical and superlinear Lagrangian function defined on the tangent bundle of an compact orientable even-dimensional manifold whose π_1 is non trivial has on every energy level above the so-called "critical one" at least one periodic orbit which is either degenerate or has one Floquet multiplier which is hyperbolic.

Key-words : Lagrangian functions , periodic orbits, Floquet multipliers , Lyapunov stability , broken geodesics , Jacobi metric.
AMS subject classification : 34D08, 34D20, 37C27, 37J45,58E99,70H03,70H12.

Table des matières

1 Introduction.

Cette introduction générale fait appel à des notions mathématiques qui seront définies précisément dans la suite de l'article.

Dans cet article, on s'interesse à l'étude dynamique des orbites périodiques des flots d'Euler-Lagrange associés à un lagrangien de classe C^3 autonome strictement convexe dans la fibre du fibré tangent d'une variété n-dimensionnelle M. Un tel lagrangien (strictement convexe dans la fibre) sera dit "optique".

Quand le lagrangien est de plus superlinéaire et la variété compacte, on sait, grâce au théorème de Tonelli (voir par exemple [Man]) qu'un tel flot a au moins une orbite périodique dans chaque classe d'homotopie de M, cette orbite réalisant le minimum de l'action lagrangienne sur les lacets de classe C^1 dans cette classe d'homotopie. Il existe aussi bien entendu parfois des orbites périodiques qui ne sont pas minimisantes dans leur classe d'homotopie (par exemple, dans le cas du pendule simple (décrit dans [Che]), le point fixe du flot qui correspond à un équilibre elliptique n'est pas minimisant pour l'action lagrangienne ; si on souhaite un exemple avec un lacet régulier, i.e. dont la dérivée ne s'annule pas, il suffit de faire le produit avec le flot géodésique du cercle) ; le lecteur trouvera dans [Jos] des résultats d'existence d'orbites périodiques qui ne sont pas forcément des minima de l'action pour des lagrangiens proches des complètement intégrables et dans [Man] des résultats analogues pour les systèmes mécaniques (énergie cinétique plus énergie potentelle).

Or, les systèmes dynamiques conservatifs peuvent admettre différents types d'orbites périodiques, les comportement des orbites de condition initiale proche de l'orbite périodique étant radicalement différents suivant le type d'orbite considéré. Plus précisément :

- l'orbite est dite hyperbolique si tous ses multiplicateurs de Floquet principaux sont de module différent de 1 ; dans ce cas, un point proche de l'orbite périodique a son orbite qui va s'écarter "avec vitesse exponentielle" dans le passé ou le futur de l'orbite périodique ;
- l'orbite est dite complètement elliptique si tous ses multiplicateurs de Floquet sont de module égal à 1. Dans ce cas, sous des hypothèses de généricité en topologie C^∞ (voir [Bos] ou [Dou]), on sait, grâce aux théorèmes K.A.M, trouver dans tout voisinage de l'orbite périodique des orbites qui restent en tout temps proche de l'orbite périodique ; de plus, un point de l'orbite périodique est alors un point de densité (pour une mesure induite par une forme volume invariante par le flot)

de l'ensemble des points qui sont sur une telle orbite ;

– il existe aussi des orbites dites elliptique × hyperboliques, qui présentent un mélange de ces deux comportements.

C'est pourquoi il est intéressant, une fois qu'on sait trouver des orbites périodiques, de se demander si celles-ci sont d'un type particulier. L'existence d'au moins un multiplicateur de Floquet de module différent de 1 par exemple implique l'existence d'orbites qui vont s'éloigner en temps positif de l'orbite périodique, i.e. le caractère instable de l'orbite périodique.

Or, si on sait trouver ces orbites périodiques comme points critiques de l'action lagrangienne, on peut alors déterminer la "hessienne" de cette action lagrangienne en ce point critique. Nous rappellerons qu'un tel point critique est toujours d'indice fini (ceci est démontré dans [Mil] dans le cas géodésique et dans [Du] dans le cas optique). Y a-t-il un lien entre cet indice et le type de l'orbite considérée ? Certains résultats semblent aller dans ce sens et d'autres semblent aller dans le sens contraire :

– un remarquable résultat de Poincaré (cf [Poi]) énonce que sur une surface orientable, toute géodésique minimisante non dégénérée est hyperbolique sans réflexion. Un résultat récent de D. Offin (voir [Off2]) généralise ce résultat aux solutions régulières des lagrangiens optiques, et même aux orbites périodiques d'indice pair ; les deux démonstrations utilisent de façon cruciale le fait que M est de dimension 2 ;

– dans [CI], G. Contreras et R. Iturriaga obtiennent eux aussi un résultat d'hyperbolicité en faisant des hypothèses fortes de minimisation : ils montrent en dimension quelconque que si une orbite périodique est "minimisante pour tout temps" (cela signifie que pour chaque $T > 0$, elle est minimisante à extrêmités fixées parmi tous les chemins de classes C^1) et si le lagrangien est en un certain sens générique, alors l'orbite est hyperbolique. L'hypothèse utilisée peut sembler assez forte, mais elle est réalisée par exemple pour les obites périodiques contenues dans un ensemble de Mather ;

– d'un autre côté, il existe des lagrangiens (pour $\dim M \geq 3$) tels que le minimum de l'action n'est pas hyperbolique, d'autres pour lesquels il est hyperbolique. Des exemples sont donnés dans [Arna] dans le cas lagrangien et un exemple de V. Bangaert dans le cas géodésique est expliqué dans [Off1].

Nous allons montrer que la "bonne" notion déterminée par l'indice de la hessienne de l'action n'est pas le *type* (i.e. la donnée de la dimension hyperbolique de l'orbite périodique) mais le nombre de Lefschetz de l'application

de premier retour dans une transversale à l'orbite périodique dans la surface d'énergie, où :
Definition : Soit p un point fixe d'une application f différentiable définie sur un voisinage de p (dans une variété différentiable) et transverse en p à l'identité . Le nombre de Lefschetz de f en p est noté $\mathrm{Lef}_p(f)$ et est :

- 1 si, lu en carte, $det(Df(p) - Id) > 0$;
- -1 si, lu en carte, $det(Df(p) - Id) < 0$.

(cette notion est indépendante de la carte choisie ; en fait, il existe une définition plus intrinsèque du nombre de Lefschetz pour les points fixes isolés des applications continues, mais ceci ne nous sera pas utile par la suite)

Remarque : Avec les mêmes notations que dans la définition précédente, supposons que f soit de plus symplectique. On sait alors que les valeurs propres de $Df(p)$ vont par paires : si λ est valeur propre, λ^{-1} est aussi valeur propre, et de même ordre. Notons alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_n^{-1}, \dots, \lambda_1^{-1}$ ces valeurs propres comptées avec multiplicité. Le nombre de Lefschetz de p est alors le signe du produit des $\sigma_j = (1 - \lambda_j)(1 - \frac{1}{\lambda_j}) = 2 - \lambda_j - \frac{1}{\lambda_j}$. Or, examinons ce qui peut se passer concernant ce signe :

- on ne peut avoir $\lambda_j = 1$ car on a supposé que f est transverse à l'identité ;
- si $\lambda_j \neq 1$ est de module 1, on a : $\sigma_j = 2(1 - \cos\theta_j) > 0$ où $\lambda_j = e^{i\theta_j}$;
- si $\lambda_j < 0$, on a : $\sigma_j > 0$;
- si $\lambda_j \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on a : $\sigma_j < 0$;
- si λ_j n'est ni réel, ni de module 1, son conjugué est aussi valeur propre, de même ordre, et donc en regroupant les σ_j correspondant on voit apparaître $\sigma_j.\overline{\sigma}_j = |\sigma_j|^2 > 0$ dans le produit.

Finalement, ce qui détermine le nombre de Lefschetz de f en p est le nombre de valeurs propres strictement positives de $Df(p)$. Plus précisément, si $Df(p)$ a exactement $2m$ valeurs propres strictement positives, alors le nombre de Lefschetz de f en p est $\mathrm{Lef}_p(f) = (-1)^m$. Or, un lagrangien optique est toujours (au moins localement) dual d'un hamiltonien et le flot d'Euler-Lagrange qui lui est asssocié est donc toujours conjugué (localement) à un flot hamiltonien, donc symplectique (voir [Fa]).

Avant d'énoncer notre résultat principal, donnons quelques définitions :
Definition : Soit p un point périodique (de plus petite période notée T) mais non fixe d'un flot d'Euler-Lagrange (φ_t). Alors :

- les valeurs propres de $D\varphi_T(p)$ sont les *multiplicateurs de Floquet* de p ;

- le champ de vecteurs étant invariant par $D\varphi_T(p)$, 1 est toujours valeur propre double de $D\varphi_T(p)$; les autres valeurs propres de $D\varphi_T(p)$ (comptées avec multiplicité, il peut y avoir de nouveau 1 si 1 est valeur propre d'ordre au moins 4) sont les *multplicateurs de Floquet principaux* de p ;
- p est dit *non dégénéré* si 1 n'est pas un de ses multiplicateurs de Floquet principaux ;
- on appellera nombre de multiplicateurs de Floquet hyperboliques sans réflexion de p et on notera $2n_h(p)$ le nombre de multiplicateurs de Floquet réels positifs et distincts de 1 de p.

Notre résultat principal s'énonce alors ainsi :

Theorème 1. *Soit M une variété orientable. Soit $L\ : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangien optique et homogène dans la fibre de classe C^3 et $\gamma\ : [0,T] \to M$ un point critique non constant et régulier de l'action lagrangienne parmi les lacets de classe C^2 de même période qui est d'indice*[1] *p et tel que $x = (\gamma(0), \dot\gamma(0))$ est un point périodique non dégénéré pour le flot d'Euler-Lagrange. Alors :*

$$n_h(x) = \dim M - 1 + p \quad (mod \quad 2).$$

Cet énoncé permet d'affirmer que sur une variété orientable de dimension paire, tout minimum régulier non dégénéré de l'action lagrangienne d'un lagrangien optique et homogène dans la fibre a une dimension hyperbolique non nulle, et donc ne saurait être ce qui s'appelle *stable au sens de Lyapunov* (c'est à dire avoir des voisinage invariants aussi proches de l'orbite périodique qu'on le veut). Il s'agit donc d'un résultat d'*instabilité*.

Il existe beaucoup de lagrangiens "classiques" (par exemple ceux de la forme "energie cinétique + énergie potentielle") qui ne sont pas homogènes dans la fibre ; on peut se demander si notre résultat peut s'appliquer à ceux-ci. En fait, nous n'avons pas été capable dans cet article de mener des calculs qui nous permettraient de relier pour un tel hamiltonien l'indice de l'action lagrangienne et l'indice de Lefschetz d'une application de premier retour. Par contre, dans le cas d'un lagrangien optique superlinéaire défini sur le fibré tangent d'une variété compacte, à partir d'un certain niveau d'énergie, nous sommes capable de modifier le lagrangien de manière à le rendre homogène dans la fibre et ayant une orbite périodique minimisante qui est aussi une orbite périodique pour le lagrangien originel, de même type. Ceci nous permet d'affirmer :

[1] L'indice sera précisément défini dans la section suivante

Corollaire 2. *Soit M une variété compacte orientable de dimension paire et de π_1 non trivial et $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangien optique superlinéaire, dual via la transformation de Legendre d'un hamiltonien $H : T^*M \to \mathbb{R}$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que toute hypersurface d'énergie de niveau au dessus de c porte au moins une orbite périodique γ qui :*

- *soit est dégénérée ;*
- *soit a un multiplicateur de Floquet hyperbolique.*

Ainsi, par exemple, si on s'intéresse à un lagrangien $L : TM \to \mathbb{R}$ de la forme : $\forall v \in T_xM, L(x,v) = V(x) + g(x)(v,v)$ où $V : M \to \mathbb{R}$ est un potentiel de classe C^3 et g est une métrique riemannienne, si on pose $c = \max\{L(x,0); x \in M\}$, on verra que si M est compacte orientable de dimension paire et de π_1 non trivial, toute hypersurface d'énergie correspondant à une valeur plus grande que c porte une orbite périodique qui soit est dégénérée, soit a un multiplicateur de Floquet hyperbolique. Cette valeur, c, est ce qu'on appelle usuellement "valeur critique de Mañé" ; nous y reviendrons plus loin.

2 Différents espaces de lacets qui donnent la même notion d'indice

Le but premier de cette section est de clarifier la notion d'*indice* utilisée mais non définie dans le théorème 1. Pour ceci, il faut expliquer sur quel espace de lacets on travaille. Ensuite, en utilisant une idée de type "géodésique brisée" (voir [Cha] pour un autre usage de cette notion) nous montrerons que cet indice peut être défini sur un espace de dimension finie. Dans cette section, nous n'aurons pas besoin de supposer le lagrangien homogène dans la fibre, et donc les résultats présentés sont valables pour tous les lagrangiens optiques.

Etant donné un lagrangien optique $L : TM \to \mathbb{R}$ de classe C^3, on cherche les solutions périodiques du flot d'Euler-Lagrange de L, i.e. les lacets $(\gamma, \dot\gamma)$ de classe C^1 qui vérifient l'équation d'Euler-lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot\gamma(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot\gamma(t)).$$

Il se trouve que ces lacets γ qui correspondent à une solution $(\gamma, \dot\gamma)$ du flot d'Euler Lagrange sont les points critiques de l'action lagrangienne (ceci est montré dans [Man]), que nous allons maintenant définir.

DEFINITION : Soit M une variété de dimension n et $L\ : TM \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, appelée *lagrangien*, qui est strictement convexe dans la fibre (ou *optique*) i.e. tel que : $\forall (x,v) \in TM$, $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)$ est définie positive.

Soit E un espace de lacets[2] tracés sur M, qui sera :

- soit la variété de Banach E_1 des lacets de classe C^1 tracés sur M ;
- soit la variété de Banach E_2 des lacets de classe C^2 tracés sur M ;
- soit une autre variété $\mathcal{M}$ (qui pourra être de dimension finie) que nous définirons un peu plus loin dans cette section ;

En tout lacet de E, l'*action lagrangienne* $A_L(\gamma)$ de γ est définie par :

$$A_L(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt.$$

L'espace tangent à E est noté TE (voir [Du]). Un lacet $\gamma \in E$ est un *point critique* de A_L si $\forall \delta\gamma \in T_\gamma E, DA_L(\gamma)(\delta\gamma) = 0$. Il est classique que les différentes notions de points critiques pour A_L (que A_L soit définie sur E_1, E_2 ou $\mathcal{M}$ que nous allons bientôt définir) coïncident et donnent toutes les solutions 1-périodiques du flot d'Euler-Lagrange. Etant donné un point critique γ de A_L, l'*indice* (dit aussi indice de Morse) de γ est défini par :
$i_E(\gamma) = \sup\{\dim W ; W$ sous-espace vectoriel de $T_\gamma E$ sur lequel $D^2 A_L(\gamma)$ est définie négative$\}$.

REMARQUE : Un résultat classique (voir [Du]) affirme que pour les lagrangiens optiques, $i_E(\gamma)$ est toujours fini.

Quand on cherche les points critiques de A_L, on peut être amené à minimiser l'action lagrangienne sur divers types d'espace (voir par exemple dans [Man] où on considère pour montrer le théorème de Tonelli les lacets tracés sur M qui sont absolument continus). Mais, s'il s'agit du problème de recherche de minimum, le lacet trouvé est évidemment un minimum sur un ensemble de lacets plus petit. C'est pourquoi dans [Du], J. Duistermaat considère l'ensemble des lacets de classe C^1 et se sert de cet espace pour définir une notion d'indice. Il est à remarquer que dans le cadre étudié (lagrangien de classe C^3), la solution trouvée est toujours de classe C^3 (voir [Man]), c'est pourquoi cet indice peut aussi être défini en utilisant l'ensemble des lacets tracés sur M de classe C^2, et c'est pourquoi les choix de E_1 et E_2 faits dans la définition précédente d'indice sont pertinents.

[2]Sans autre précision, nos lacets seront toujours paramétrés par $[0,1]$ identifié aussi à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Montrons maintenant que i_{E_1} et i_{E_2} coïncident.

Lemme 3. *Soit γ un point critique de A_L. Alors : $i_{E_1}(\gamma) = i_{E_2}(\gamma)$.*

Démonstration du lemme 3 : par définition de l'indice et comme $E_2 \subset E_1$, on a : $i_{E_2}(\gamma) \leq i_{E_1}(\gamma)$. Soit maintenant $(\delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_k)$ une famille libre de $T_\gamma E_1$ telle que sur $F = \mathrm{Vect}(\delta\gamma_1, \ldots, \delta\gamma_k)$, $D^2 A_L(\gamma)$ soit définie négative. Remarquons que :

$$D^2 A_L(\gamma)(\delta\gamma, \delta\gamma) =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\dot\gamma, \delta\dot\gamma) + 2\frac{\partial^2 L}{\partial v \partial x}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\gamma, \delta\dot\gamma) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\gamma, \delta\gamma) \right)$$

Or, tout lacet de classe C^1 s'écrit comme limite (pour la topologie C^1) d'une suite de lacets de classe C^2. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, il existe une suite $(\delta\gamma_i^m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $T_\gamma E_2$ qui converge pour la topologie C^1 de $T_\gamma E_1$ vers $\delta\gamma_i$. L'espace vectoriel $F_n = \mathrm{Vect}(\delta\gamma_1^n, \ldots, \delta\gamma_k^n)$ converge alors (au sens des grassmanniennes) vers F, et comme $D^2 A_L(\gamma)$ est définie négative sur F, elle est aussi définie négative sur F_n pour n assez grand (ici, on utilise que F est de dimension finie). Ce qui prouve que $i_{E_2}(\gamma) \geq k$. Comme on pouvait choisir $k = i_{E_1}(\gamma)$, on trouve l'égalité cherchée. □

Bien entendu, cela implique que pour tout choix de E compris entre E_1 et E_2, on obtient la même définition d'indice.

Nous allons maintenant introduire une famille de variétés de Banach $\mathcal{M}$ qui contiennent toutes E_1, et nous allons successivement montrer que :

– l'indice de Morse $i_{\mathcal{M}}$ défini à l'aide de $\mathcal{M}$ et l'indice de Morse i_{E_1} défini à l'aide de E_1 coïncident ;

– étudiant $D^2 A_L(\gamma)$ sur $T_\gamma\mathcal{M}$, on montrera que pour des choix judicieux de $\mathcal{M}$, $T_\gamma\mathcal{M}$ est la somme orthogonale (orthogonale pour $D^2 A_L(\gamma)$) d'un espace de dimension infine sur lequel $D^2 A_L(\gamma)$ est positive et d'un espace de dimension finie W ; c'est ainsi qu'on se sera ramené à travailler en dimension finie : l'indice de $D^2 A_L(\gamma)$ coïncide avec celui de $D^2 A_L(\gamma)_{|W}$. Nous mettrons d'ailleurs en évidence une sous-variété de dimension finie $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ telle que $T_\gamma\mathcal{N} = W$.

Rappelons que $\gamma : [0, 1] \to M$ est un point critique de A_L.

Choisissons alors $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k < 1$ une subdivision (éventuellement vide) de $[0, 1]$ et définissons $\mathcal{M}$ (qui dépend du choix de $t_1, \ldots, t_k$) comme l'ensemble des lacets η continus, C^2 par morceaux, tels que la restriction de η à chaque intervalle de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ (en posant $t_{k+1} = t_1$) est de classe C^2 ; en d'autres termes, $(\eta, \dot\eta)$ est continue par morceaux, les "morceaux" étant les $[t_i, t_{i+1}]$ (rappelons que nous avons identifié $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à

$[0,1]$) et la restriction à chaque morceau étant de classe C^1. Commençons par montrer le premier résultat voulu, c-à-d qu'on garde la même notion d'indice que précédemment (la variété est munie de la topologie C^2) :

Lemme 4. *Soit γ un point critique de A_L. Alors : $i_{E_2}(\gamma) = i_{\mathcal{M}}(\gamma)$.*

Démonstration du lemme 4 : Comme $E_2 \subset \mathcal{M}$, on a : $i_{E_2}(\gamma) \leq i_{\mathcal{M}}(\gamma)$. De plus, on a :

$$D^2A_L(\gamma)(\delta\gamma, \delta\gamma) =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\dot\gamma, \delta\dot\gamma) + 2\frac{\partial^2 L}{\partial v \partial x}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\gamma, \delta\dot\gamma) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\gamma, \delta\gamma) \right)$$

Soit alors $(\delta\gamma_1, \dots, \delta\gamma_k)$ une famille libre de $T_\gamma\mathcal{M}$ telle que $D^2A_L(\gamma)$ soit définie négative sur $F = \mathrm{Vect}(\delta\gamma_1, \dots, \delta\gamma_k)$. En utilisant une métrique riemannienne sur M, on a une notion de convergence L^2 dans $T_\gamma\mathcal{M}$; il existe alors pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$ une suite $(\delta\gamma_i^m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $T_\gamma E_2$ telle que $(\delta\dot\gamma_i^m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\delta\dot\gamma_i$ pour la topologie L^2. Alors chaque suite $(D^2A_L(\delta\gamma_i^n, \delta\gamma_j^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $D^2A_L(\delta\gamma_i, \delta\gamma_j)$. La matrice $(D^2A_L(\delta\gamma_i, \delta\gamma_j))_{(i,j)\in[1,k]^2}$ étant définie négative, il en est de même de la matrice $(D^2A_L(\delta\gamma_i^n, \delta\gamma_j^n))_{(i,j)\in[1,k]^2}$ pour n assez grand. On en déduit que $k \leq i_{E_2}(\gamma)$, donc le résultat cherché en prenant $k = i_{\mathcal{M}}(\gamma)$. □

Nous allons maintenant expliquer comment nous choisissons les $t_1, \dots, t_k$ afin d'arriver un formalisme cherché.

Comme L est strictement convexe dans la fibre, l'application $\mathcal{L} = L_v = \frac{\partial L}{\partial v} : TM \to T^*M$ est un difféomorphisme de TM sur son image U (voir [Man] ou [Fa]), appelé application de Legendre. Alors, le flot $(f_t) = (\mathcal{L} \circ \varphi_t \circ \mathcal{L}^{-1})$ défini sur U est un flot hamiltonien sur $U \subset T^*M$ (pour la forme symplectique standard qui est la dérivée extérieure de la 1-forme de Liouville) associé au hamiltonien H défini par : $H(x,r) = p \circ \mathcal{L}^{-1}(x,r) - L \circ \mathcal{L}^{-1}(x,r)$ qui est de classe C^3 et strictement convexe dans la fibre (voir [Fa])[3]. Convenons alors de noter, si $(x,r) \in T^*M$: $f_t(x,r) = (x_t, r_t)$. De plus, on convient que toutes les cartes symplectiques que l'on construira sur T^*M seront de la forme suivante : on choisit des coordonnées $(q_1, \dots, q_n)$ sur M, puis on choisit les coordonnées restantes $(p_1, \dots, p_n)$ de manière à ce que toute forme $\eta \in T^*M$ du domaine de la carte s'écrive : $\eta = \sum_{i=1}^n p_i(\eta) dq_i$. Une telle carte sera dite *canonique*. Plus précisément, si (V_i, φ_i) est une carte de M, la *carte canonique qui lui est associée* est (T^*V_i, Φ_i) où $\Phi_i(x,r) = (\varphi_i(x), r \circ (D\varphi_i(x))^{-1})$ (dans cette écriture $\mathbb{R}^n$ est identifié à son dual).

[3]On dit que H est le hamiltonien asossié à L via la dualité de Legendre

Nous allons montrer :

Lemme 5. *Soit K une partie relativement compacte (dans U) de U. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, il existe deux recouvrement finis de K par des cartes canoniques*[4] $\mathcal{V} = \{(V_i, \Phi_i); i \in I\}$ *et* $\mathcal{W} = \{(W_i, \psi_i); i \in I\}$ *tels que :*

- *les cartes V_i et W_i sont des cartes canoniques associées à des cartes orientées de M ;*
- *pour tout $i \in I$, pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, $f_t(V_i) \subset W_i$;*
- *si on note $\Phi_i(x, r) = (x_i, r_i)$ et $\psi_i(x, r) = (x^i, r^i)$, l'application $h_i : V_i \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par : $h_i(x, r) = (x_i, x^i_\varepsilon)$ est un difféomorphisme sur son image.*

Ce lemme permet de prendre comme coordonnées la "coordonnée horizontale" de (x, r) et la "coordonnée horizontale" de $f_\varepsilon(x, r)$. C'est dans ces coordonnées (en plusieurs points du lacet considéré) que nous arriverons à nous ramener à un formalisme de dimension finie.

La méthode consistant à utiliser ces "coordonnées horizontales" n'est pas nouvelle (voir aussi remarque suivant la démonstration du lemme) ; dans le chapitre 7 du livre [Go] de C. Golé, par exemple, il est expliqué comment décomposer le temps 1 d'un flot hamiltonien sur un compact d'un fibré cotangent comme un produit d'"applications twist" pour lesquelles on peut choisir de telles coordonnées (nous renvoyons le lecteur à cette réfeérence pour la définition exacte d'application twist).

Démonstration du lemme 5 : Pour vérifier la première condition, on utilise le fait que M est orientable. Il est facile de construire des cartes de taille aussi petite qu'on le veut et de norme C^1 uniformément majorée (i.e. on peut diminuer la taille des cartes sans changer ces normes C^1 : il suffit de restreindre les cartes) qui vérifient la second condition pour un certain $\varepsilon_0 > 0$; pour chaque $(x, r) \in U_i$ et chaque $t \in [0, \varepsilon_0]$, notons $M_{i,t}(x, r)$ la matrice (symplectique) de $Df_t(x, r)$ dans les cartes V_i, V_i ; on peut l'écrire par blocs $n \times n$:

$$M_{t,i} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{t,i} & c_{t,i} \\ b_{t,i} & d_{t,i} \end{pmatrix}$$

Alors, avec des abus de notation évidents (on écrit les différentielles en cartes), on a par les équation de Hamilton : $\dot{c}_{t,i} = H_{pq} c_{t,i} + H_{pp}(\varphi_t(x, r)) d_{t,i}$, dont on déduit que :

[4] Ces cartes sont donc de la forme décrite précédemment

– pour $t > 0$ petit $\det c_{t,i} > 0$ puisque $c_{t,i} \sim tH_{pp}(\varphi_t(x,r))d_{t,i} \sim tH_{pp}(x,r)$;
– cette estimation dépend continument du point (x,r) puique $c_{t,i}$ dépend de façon C^2 du temps et de façon C^2 de la position (x,r)[5] : on écrit $c_{t,i} = tH_{p,p}(x,r) + R(t,x,r)$ et on a une majoration uniforme de $\frac{R(t,x,r)}{t}$ par Taylor-Lagrange, qui nous donne $\varepsilon_0 > 0$ uniforme tel que pour tout $(x,r) \in V_i$ et tout $t \in]0, \varepsilon_0]$, $\det c_{t,i} > 0$.

Mais ce qui nous intéresse n'est pas la matrice $M_{t,i}$ de $Df_t(x,r)$ dans les cartes V_i, V_i mais la matrice $N_{t,i}$ de $Df_t(x,r)$dans les cartes V_i, W_i. Notons alors $(\xi_i, {}^t(D\xi_i)^{-1})\ : \Phi_i(V_i) \to \psi_i(W_i)$ le changement de cartes. Comme par hypothèse ξ_i préserve l'orientation, sa matrice est de la forme :

$$P_i \quad = \quad \begin{pmatrix} p_i & 0 \\ X_i & {}^t p_i^{-1} \end{pmatrix}$$

où $\det p_i > 0$. Donc :

$$N_{t,i} = P_i M_{t,i} = \begin{pmatrix} p_i a_{t,i} & p_i c_{t,i} \\ X_i a_{t,i} + {}^t p_i^{-1} b_{t,i} & X_i c_{t,i} + {}^t p_i^{-1} d_{t,i} \end{pmatrix}$$

est encore telle que : $\det(p_i c_{t,i}) > 0$.

Considérons alors l'application h_i définie dans le lemme 5. Le théorème d'inversion locale nous dit alors que pour tout $t \in]0, \varepsilon]$, l'application h_i est un difféomorphisme local. Donc, si on fixe t et si on a choisi la taille des cartes assez petite, c'est un difféomorphisme. □

Remarque :

1. Dans la démonstration du lemme, nous avons été amenés à remarquer que le flot envoie (localement) les verticales sur des sous-variétés qui se projettent bien (i.e. difféomorphiquement au moins localement) sur l'"horizontale". Nous renvoyons le lecteur à [Fa] pour une autre démonstration de ce résultat qui a le mérite d'être uniforme pour $\varepsilon \in]0, \alpha]$ (ce qui est crucial pour démontrer le théorème de Weierstarss, à savoir que les "petites" orbites sont minimisantes).
2. La détermination d'un point par la coordonnée "horizontale" de ce point et la coordonnée horizontale de son image par une application " déviant la verticale" est couramment utilisée dans un cadre un peu

[5] Rappelons que le hamiltonien est de classe C^3.

différent mais pas trop éloigné de celui que nous considérons ici : il s'agit du cadre de la théorie d'Aubry-Mather pour les applications qui dévient la verticale.

Retrouvons maintenant le point critique $\gamma \in E_2$ de l'action lagrangienne qui nous intéresse et l'orbite périodique $(x_t, r_t) = \mathcal{L}(\gamma(t), \dot\gamma(t))$ du flot hamiltonien qui lui correspond. Comme $K = \{(x_t, r_t); t \in [0,1]\}$ est compact, on peut lui appliquer le lemme 5 : on recouvre K par des carte (V_i, Φ_i) et (W_i, ψ_i) comme dans ce lemme et on choisit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ de la forme $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Remarquons que comme on a pris soin de choisir toutes les cartes canoniques ("duales" de cartes de M), les changements de cartes préservent la fibration (dite "verticale") et leur restriction à l'"horizontale" (ce qu'on obtient en quotientant par la verticale) sont des difféomorphismes. Notons pour chaque $j \in \{0, \dots, N\}$: $(q_j, p_j) = f_{\frac{j}{N}}(x, r)$. Chaque (q_j, p_j) est dans une carte V_{i_j} et par le lemme 5 l'application $h_{i_j} \;: V_{i_j} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par : $h_{i_j}(x, r) = (x_{i_j}, x_\varepsilon^{i_j})$ est un difféomorphisme sur son image. A cause de la remarque que nous venons de faire sur les changements de cartes qui en restriction aux horizontales sont des difféomorphismes, on en déduit que $g_j \;: U_j = V_{i_j} \cap f_{-\frac{1}{N}}(V_{i_{j+1}}) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par : $g_j(y, \rho) = (y_{i_j}, y_{\varepsilon, i_{j+1}})$ est aussi un difféomorphisme : en d'autres termes, on utilise la carte $(V_{i_{j+1}}, \Phi_{i_{j+1}})$ au voisinage de (q_{j+1}, p_{j+1}) plutôt que la carte (W_{i_j}, ψ_{i_j}). Nous avons de plus déjà remarqué que ce changement de carte conserve la propriété "$\det c_i > 0$".

Nous pouvons maintenant expliquer comment nous choisissons la subdivision de $[0,1]$ qui permet de définir $\mathcal{M}$: pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, on pose : $t_i = \frac{i-1}{N}$. De plus, on définit une sous-variété ouverte $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ de la manière suivante : $\eta \in \mathcal{M}$ est dans $\mathcal{M}'$ si pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{L}(\eta(t_i), \dot\eta(t_i^-)) \in U_i$ et $\mathcal{L}(\eta(t_i), \dot\eta(t_i^+)) \in U_i$. Ainsi, on demande qu'aux discontinuités (éventuelles) t_i de la dérivée de η, $(\eta, \dot\eta)$ ne soit pas trop éloigné de $(\gamma, \dot\gamma)$. Ceci définit bien entendu un voisinage ouvert de γ dans $\mathcal{M}$ et ne change pas la notion d'indice (qui est une notion locale).

Mettons maintenant en évidence une sous-variété de dimension finie de $\mathcal{M}'$; notons pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$: $U'_i = g_i(U_i)$ (rappelons que $U'_i \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$), et donnons nous une suite $(y_i)_{1 \le i \le N}$ de points tels que $(y_i, y_{i+1}) \in U'_i$. Posons alors $(x_i, r_i) = g_i^{-1}(y_i, y_{i+1})$. Par définition de h_i et g_i, le point (x_i, r_i) lu dans la carte (U_i, Φ_i) a pour coordonnée horizontale y_i et le point $f_{\frac{1}{N}}(x_i, r_i)$ lu dans la carte (U_{i+1}, Φ_{i+1}) a pour coordonnée horizontale y_{i+1}. Aussi, si on définit un lacet $\eta = \eta(y_1, \dots, y_N)$ par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall t \in [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}], \eta(t) = \pi \circ f_{t - \frac{i-1}{N}}(x_i, r_i)$$

où $\pi\ : TM \to M$ est la projection, η est un élément de $\mathcal{M}'$ (qui en chaque t_i passe par le point de Φ_i-coordonnée y_i). On appelle alors $\mathcal{N}$ l'ensemble des tels η ; c'est une sous-variété de $\mathcal{M}'$ de dimension Nn. Ce sont les éléments de $\mathcal{N}$ qu'on appelle *solutions brisées* ; ce sont en effet des lacets de $\mathcal{M}'$ tels que chaque restriction à un intervalle de la forme $[t_i, t_{i+1}]$ est une solution des équations d'Euler-Lagrange.

Nous allons maintenant montrer que notre variété $\mathcal{N}$ de solutions brisées joue le rôle que nous avions annoncé, c-à-d est porteuse de toute l'information concernant l'indice de la solution γ. Pour cela, précisons la forme de D^2A_L sur $\mathcal{M}$:

Lemme 6. *Soit $\gamma\ : \mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$ un point critique de $A_L\ : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ et $\delta\gamma, \delta\eta \in T_\gamma\mathcal{M}$. Alors $D^2A_L(\gamma)(\delta\gamma, \delta\eta)$ est égal à :*

$$\sum_{i=1}^{N} [(L_{vv}\delta\dot\eta|\delta\gamma)]_{t_i}^{t_{i+1}} + \int_{\mathbf{S}^1} \left(L_{xx}\delta\eta + L_{vx}\delta\dot\eta - \frac{d}{dt}(L_{xv}\delta\eta + L_{vv}\delta\dot\eta)|\delta\gamma \right)$$

i.e. est égal à :

$$\sum_{i=1}^{N} \left[(L_{vv}(\delta\dot\eta(t_i^-) - \delta\dot\eta(t_i^+))|\delta\gamma(t_i))\right]_{t_i}^{t_{i+1}}$$

$$+ \int_{\mathbf{S}^1} \left(L_{xx}\delta\eta + L_{vx}\delta\dot\eta - \frac{d}{dt}(L_{xv}\delta\eta + L_{vv}\delta\dot\eta)|\delta\gamma \right)$$

Démonstration du lemme 6 : Par définition, $D^2A_L(\gamma)(\delta\gamma, \delta\eta)$ est égal à :

$$\int_0^1 (L_{vv}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\dot\eta, \delta\dot\gamma) + L_{v,x}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\dot\eta, \delta\gamma) + L_{x,v}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\eta, \delta\dot\gamma) + L_{x,x}(\gamma, \dot\gamma)(\delta\eta, \delta\gamma))$$

Explicitons le terme :

$$I = \int_0^1 (L_{vv}(\delta\dot\eta, \delta\dot\gamma) + L_{x,v}(\delta\eta, \delta\dot\gamma))) = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (L_{vv}(\delta\dot\eta, \delta\dot\gamma) + L_{xv}(\delta\eta, \delta\dot\gamma))$$

en faisant une intégration par partie (si N a été choisi assez grand, chaque $\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}$ est dans une même carte et on peut consideér que nous travaillons en carte) :

$$I = \sum_{i=1}^{N} \left([(L_{vv}\delta\dot\eta + L_{xv}\delta\eta|\delta\gamma)]_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\frac{d}{dt}(L_{vv}\delta\dot\eta + L_{xv}\delta\eta)|\delta\gamma) \right)$$

ce qui donne le résultat voulu. $\square$

L'espace tangent $T_\gamma\mathcal{N} = W$ est l'ensemble des lacets $\delta\eta$ de $T_\gamma\mathcal{M}$ qui sont des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange linéarisée sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$; à tous $\delta y_i \in T_{p_i}M$ correspond un unique $\delta\eta \in W$ tel que $\forall i, \delta\eta(t_i) = \delta y_i$. Ausi, l'espace :

$$F = \{\delta\gamma \in T_\gamma\mathcal{M}; \forall i \in \{1, \dots, N\}, \delta\gamma(t_i) = 0\}$$

est un supplémentaire de W. De plus, la formule fournie par le lemme précédent nous permet de dire que F est orthogonal à W (ce n'est pas l'orthogonal à W car $D^2A_L(\gamma)_{|W}$ est dégénérée).

Pour conclure cette partie en nous ramenant à travailler sur une variété $\mathcal{N}$ de dimension finie, il nous reste à justifier le fait que la restriction de $D^2A_L(\gamma)$ à F est positive.

Or, le théorème de Weierstrass (voir [Man] ou [Fa]) affirme qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : pour tout $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\gamma_{|[t,t+\varepsilon]}$ est l'unique minimum de A_L parmi les courbes ayant mêmes extrêmités ; ceci implique que si on a choisi N assez grand, la restriction de $D^2A_L(\gamma)$ à F est positive.

3 Démonstration du théorème 1

Dans la section précédente, nous avons déterminé un N_0 tel que si $N \geq N_0$, si on pose pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$: $t_i = \frac{i-1}{N}$ et $(x_i, r_i) = \mathcal{L}(\gamma(t_i), \dot\gamma(t_i))$, alors :

1. il existe en chaque (x_i, r_i) une carte canonique (V_i, Φ_i) dans laquelle on note les coordonnées (q_i, p_i) ;
2. il existe $U_i \subset V_i$ voisinage de (x_i, r_i) tel que l'application $g_i : U_i \to U_i' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par : $\forall y \in U_i, g_i(y) = (q_i(y), q_{i+1}(f_{\frac{1}{N}}(y))$ est un difféomorphisme de classe C^1 (i.e. y est déterminé par sa "coordonnée horizontale" et la coordonnée horizontale de $f_{\frac{1}{N}}(y)$).

Si on note alors M_i la matrice (symplectique) de $Df_{\frac{1}{N}}(x_i, r_i)$ dans les coordonnées (V_i, Φ_i), (V_{i+1}, Φ_{i+1}) par blocs $n \times n$:

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ b_i & d_i \end{pmatrix}$$

alors on a : $\det c_i > 0$.

On a alors défini $\mathcal{M}$ comme l'ensemble des lacets γ continus qui sont de classe C^2 par morceaux, les morceaux étant les $[t_i, t_{i+1}]$[6], puis $\mathcal{M}'$ comme les éléments η de $\mathcal{M}$ qui vérifient pour chaque i : $\mathcal{L}(\eta(t_i), \dot{\eta}(t_i^-)), \mathcal{L}(\eta(t_i), \dot{\eta}(t_i^+)) \in U_i$. Puis on a introduit une sous-variété $\mathcal{N}$ de dimension finie de $\mathcal{M}'$, qui est constituée des éléments $\eta(y_1, \dots, y_N)$ où, si $y_i \in U'_i$, on pose : $(z_i, \rho_i) = g_i^{-1}(y_i, y_{i+1})$ et pour chaque i :

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \eta(y_1, \dots, y_N)(t) = \pi \circ f_{t-t_i}(z_i, \rho_i);$$

où $\pi\ : T^*M \to M$ est la projection. Le lacet $\eta(y_1, \dots, y_N)$ vérifie alors :

$$\Phi_i(\eta(y_1, \dots y_N)(t_i)) = (y_i, .),$$

est continu, et sa restriction à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est une solution des équations d'Euler-Lagrange : on dit que $\eta(y_1, \dots, y_N)$ est une *solution brisée.*

On a vu que l'indice de $D^2 A_L(\gamma)_{|T_\gamma \mathcal{M}}$ coïncide avec celui de la restriction de $D^2 A_L(\gamma)$ à $W = T_\gamma \mathcal{N}$; c'est pourquoi désormais nous allons étudier cette restriction et essayer de la relier aux valeurs propres de $Df_1(x_1, r_1)$.

Commençons par expliquer comment on peut ramener la recherche des valeurs propres de $Df_1(x_1, r_1)$ à l'étude d'une forme quadratique. La règle de différentiation des fonctions composées nous permet d'écrire :

$$Df_1(x_1, r_1) = Df_{\frac{1}{N}}(x_N, r_N) \circ \cdots \circ Df_{\frac{1}{N}}(x_1, r_1)$$

donc la matrice de $Df_1(r_1, r_1)$ en coordonnées (V_1, Φ_1) est $M_N \dots M_1$. Or :

Lemme 7. *Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, il existe deux matrices symétriques S_i et S'_i telles que :*

$$M_i = \begin{pmatrix} c_i S'_i & c_i \\ S_i c_i S'_i - {}^t c_i^{-1} & S_i c_i \end{pmatrix}.$$

De plus, si on a choisi N assez grand, S_i et S'_i sont définies positives.

Démonstration du lemme 7 : Si (x, r) est un point de l'orbite périodique, la matrice (symplectique) de $Df_t(x, r)$ dans des cartes canoniques s'écrit par blocs $n \times n$:

$$M_t \quad = \quad \begin{pmatrix} a^t & c^t \\ b^t & d^t \end{pmatrix}$$

[6]Rappelons que $[0, 1]$ est identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et que $t_{N+1} = t_1$

Les équation de Hamilton linéarisées (et le fait que $f_0 = Id$) donnent alors *si les deux cartes coïncident* : $c^t \sim_{t\to 0} tH_{rr}(x,r)$ et $d^t \sim_{t\to 0} \mathbf{1}$ et $a^t \sim_{t\to 0} \mathbf{1}$, ceci étant uniforme si on prend un nombre fini de cartes et on considère tous les points de l'orbite périodique.

Aussi, si N est assez grand et si la matrice de $Df_{\frac{1}{N}}(x_i, r_i)$ dans la carte V_i est notée :

$$\tilde{M}_i \quad = \quad \begin{pmatrix} \tilde{a}_i & \tilde{c}_i \\ \tilde{b}_i & \tilde{d}_i \end{pmatrix}$$

on peut écrire que $\tilde{c}_i^{-1}\tilde{a}_i$ et $\tilde{d}_i\tilde{c}_i^{-1}$ sont de la forme : $N[H_{rr}(x_i,r_i)]^{-1} + o(N)$

Nous avons déjà remarqué que $\det \tilde{c}_i > 0$, ceci implique que l'image de la verticale est un graphe au dessus de l'horizontale, donc un graphe lagrangien puisque la matrice est symplectique et la verticale lagrangienne. Il existe donc une matrice symétrique $\tilde{S}_i$ dont c'est le graphe ; par définition, on a donc $\tilde{d}_i = \tilde{S}_i\tilde{c}_i$, i.e. $\tilde{s}_i = \tilde{d}_i\tilde{c}_i^{-1}$; par la remarque faite en début de démonstration, si N est assez grand, $\tilde{S}_i$ est, comme l'est $N[H_{rr}(x_i,r_i)]^{-1}$, définie positive.

Comme $\tilde{M}_i$ est symplectique, elle vérifie de plus les relations suivantes :

- ${}^t\tilde{a}_i\tilde{b}_i$ and ${}^t\tilde{c}_i\tilde{d}_i$ sont des matrices symétriques ;
- ${}^t\tilde{a}_i\tilde{d}_i - {}^t\tilde{b}_i\tilde{c}_i = \mathbf{1}$.

Donc : ${}^t\tilde{b}_i = {}^t\tilde{a}_i\tilde{d}_i\tilde{c}_i^{-1} - \tilde{c}_i^{-1} = {}^t\tilde{a}_i\tilde{S}_i - \tilde{c}_i^{-1}$.

De plus, ${}^t\tilde{a}_i\tilde{b}_i$ est symétrique, i.e. ${}^t\tilde{a}_i\tilde{S}_i\tilde{a}_i - {}^t\tilde{a}_i{}^t\tilde{c}_i^{-1}$ est symétrique et donc il existe $\tilde{S}'_i$ symétrique telle que : $\tilde{c}_i^{-1}\tilde{a}_i = \tilde{S}'_i$, i.e : $\tilde{a}_i = \tilde{c}_i\tilde{S}'_i$. On a donc :

$$\tilde{M}_i = \begin{pmatrix} \tilde{c}_i\tilde{S}'_i & \tilde{c}_i \\ \tilde{S}_i\tilde{c}_i\tilde{S}'_i - {}^t\tilde{c}_i^{-1} & \tilde{S}_i\tilde{c}_i \end{pmatrix}.$$

$\tilde{S}'_i$ est définie positive pour N assez grand car $\tilde{S}'_i = \tilde{c}_i^{-1}\tilde{a}_i$.

Rappelons que la matrice de $Df_{\frac{1}{N}}(x_i, r_i)$ dans les cartes V_i, W_i est notée :

$$M_i \quad = \quad \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ b_i & d_i \end{pmatrix}$$

Elle se déduit de celle de $\tilde{M}_i$ en multipliant à gauche par un changement de cartes canoniques associées à des cartes de M orientées ; il existe donc une matrice $n \times n$ notée p_i telle que :

$$M_i \quad = \begin{pmatrix} p_i & 0 \\ X_i & {}^tp_i^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_i\tilde{S}'_i & \tilde{c}_i \\ \tilde{S}_i\tilde{c}_i\tilde{S}'_i - {}^t\tilde{c}_i^{-1} & \tilde{S}_i\tilde{c}_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (p_i\tilde{c}_i)\tilde{S}'_i & (p_i\tilde{c}_i) \\ X_i\tilde{c}_i\tilde{S}'_i + ({}^tp_i^{-1}\tilde{S}_ip_i^{-1})(p_i\tilde{c}_i)\tilde{S}'_i - {}^t\tilde{c}_i^{-1} & X_i\tilde{c}_i + ({}^tp_i^{-1}\tilde{S}_ip_i^{-1})(p_i^{-1}\tilde{c}_i) \end{pmatrix}$$

ce qui donne la conclusion du lemme pour $c_i = p_i\tilde{c}_i$, $S'_i = \tilde{S}'_i$ et $S_i = X_ip_i + {}^tp_i^{-1}\tilde{S}_itp_i^{-1}$ (X_ip_i est uniformément borné alors que le second terme de cette somme équivaut à $N^tp_i^{-1}[H_{rr}(x_i,r_i)]^{-1}p_i^{-1}$). □

Plutôt que de travailler dans les coordonnés (Φ_i, V_i), on va travailler dans les cartes (U_i, g_i). Alors :

Lemme 8. *Pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, la matrice de $Df_{\frac{1}{N}}(x_i,r_i)$ en coordonnées (U_i,g_i), (U_{i+1},g_{i+1}) est :*

$$R_i = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -c_{i+1}{}^tc_i^{-1} & c_{i+1}(S'_{i+1}+S_i) \end{pmatrix}.$$

Démonstration du lemme 8 : Par définition de g_i, la matrice de $Dg_i(x_i,r_i) \circ D\Phi_i(x_i,r_i)^{-1}$ est :

$$P_i = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ c_iS'_i & c_i \end{pmatrix}$$

Donc :

$$P_i^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ -S'_i & c_i^{-1} \end{pmatrix}$$

et :

$$R_i = P_{i+1}M_iP_i^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -c_{i+1}{}^tc_i^{-1} & c_{i+1}(S'_{i+1}+S_i) \end{pmatrix}.$$

□

Notation : On note pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$:

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} S'_1+S_N & -\lambda c_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\lambda}{}^tc_N^{-1} \\ -\frac{1}{\lambda}{}^tc_1^{-1} & S'_2+S_1 & -\lambda c_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ -\lambda c_N^{-1} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\lambda}{}^tc_{N-1}^{-1} & S'_N+S_{N-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 9. *pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a :*

$$\frac{(-1)^n\lambda^{-nN}}{\prod_{i=1}^N \det(c_i)} \det(Df_1(x_1,r_1) - \lambda^N\mathbf{1}) = \det T_\lambda$$

Remarque : Avec certaines notations légèrement différentes, cette matrice n'est pas nouvelle ; on la trouve dans [MacMe] dans le cas de la dimension 2 et dans [KoMe] pour toute dimension, où T_λ s'exprime à l'aide de la hessienne d'une fonction génératrice, et elle est reprise dans [Go] ; on aurait pu choisir dans cet article de raisonner plutôt avec les fonctions génératrices et utiliser directement ce résultat, mais notre démarche a été autre pour deux raisons :

- il nous aurait fallu introduire le langage des fonctions génératrices, qui ne sont pas nécécessaires ici pour comprendre ce qui se passe, et sans-doute aurait-on allongé le texte avec cette introduction ;
- dans [KoMe] tout comme [Go], seul le cas des vecteurs propres est traité, et pas celui des sous-espaces caractéristiques (appelés aussi espaces propres généralisés), ce qui pose des problèmes quand les valeurs propres sont multiples.

Démonstration de la proposition 9 : Par le lemme 8, on sait que la matrice de $Df_1(x_1, r_1)$ dans les coordonnées (U_1, g_1) est $R_N \times \cdots \times R_1$. On note alors :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_N \\ R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & . & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & R_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $\det(R - \lambda\mathbf{1}) =$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda\mathbf{1} & 0 & . & 0 & R_N \\ R_1 & -\lambda\mathbf{1} & . & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & . & 0 & 0 \\ & & . & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & . & R_{N-1} & -\lambda\mathbf{1} \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda}R_1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda^2}R_2R_1 & \frac{1}{\lambda}R_2 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ & & . & & \\ & & & & \\ \frac{1}{\lambda^{N-1}}R_{N-1}\dots R_2R_1 & . & \frac{1}{\lambda^2}R_{N-1}R_{N-2} & \frac{1}{\lambda}R_{N-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^{N-1}} R_N R_{N-1} \dots R_2 R_1 - \lambda \mathbf{1} & * & * & * & * \\ 0 & -\lambda \mathbf{1} & * & * & * \\ 0 & 0 & -\lambda \mathbf{1} & * & * \\ & & . & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$= \det(R_N \dots R_1 - \lambda^N \mathbf{1}) = \det(Df_1(x_1, r_1) - \lambda^N Id)$.

Rappelons que :

$$R_i = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -c_{i+1} {}^t c_i^{-1} & c_{i+1}(S'_{i+1} + S_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{i+1} & 0 \\ 0 & c_{i+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & c_{i+1}^{-1} \\ -{}^t c_i^{-1} & (S'_{i+1} + S_i) \end{pmatrix}.$$

Aussi, si on pose :

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0 & c_{i+1}^{-1} \\ -{}^t c_i^{-1} & (S'_{i+1} + S_i) \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ & & . & & \\ 0 & 0 & . & 0 & \begin{pmatrix} c_N & 0 \\ 0 & c_N \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

on constate que :

$$R - \lambda \mathbf{1} = C \begin{pmatrix} -\lambda \begin{pmatrix} c_1^{-1} & 0 \\ 0 & c_1^{-1} \end{pmatrix} & 0 & . & 0 & Q_N \\ Q_1 & -\lambda \begin{pmatrix} c_2^{-1} & 0 \\ 0 & c_2^{-1} \end{pmatrix} & . & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & . & 0 & 0 \\ & & . & & \\ 0 & 0 & . & Q_{N-1} & -\lambda \begin{pmatrix} c_N^{-1} & 0 \\ 0 & c_N^{-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

donc $\det(R-\lambda\mathbf{1})$ est égal à :

$$\prod_{i=1}^{N}\det(c_i)^2.\det\begin{pmatrix} -\lambda\begin{pmatrix} c_1^{-1} & 0 \\ 0 & c_1^{-1}\end{pmatrix} & 0 & . & 0 & Q_N \\ Q_1 & -\lambda\begin{pmatrix} c_2^{-1} & 0 \\ 0 & c_2^{-1}\end{pmatrix} & . & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & . & 0 & 0 \\ & & . & & \\ 0 & 0 & . & Q_{N-1} & -\lambda\begin{pmatrix} c_N^{-1} & 0 \\ 0 & c_N^{-1}\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

En faisant des permutations sur les lignes et les colonnes, on trouve que

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{N}\det(c_i)^2}\det(R-\lambda\mathbf{1})$$

est égal à $\det\Lambda_\lambda$ où Λ_λ est égal à :

$$\begin{pmatrix} -\lambda\begin{pmatrix} c_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & \dots & 0 & c_N^{-1}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_1^{-1} \\ c_2^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & \dots & 0 & c_N^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -{}^tc_N^{-1} \\ -{}^tc_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -{}^tc_{N-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\lambda c_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & S_1'+S_N \\ S_2'+S_1 & -\lambda c_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \dots & 0 & S_N'+S_{N-1} & -\lambda c_N^{-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Posons alors :

$$N_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}\mathbf{1} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \dots & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ & & & \\ 0 & & & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est λ^{-nN}. On en déduit que : $\frac{1}{\lambda^{nN}\prod_{i=1}^{N}\det(c_i)^2}\det(R-\lambda\mathbf{1})$ est égal à $\det(\Lambda_\lambda N_\lambda)$, où $\Lambda_\lambda N_\lambda =$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_1^{-1} \\ c_2^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & \dots & 0 & c_N^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} S_1'+S_N & -\lambda c_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\lambda}{}^t c_N^{-1} \\ -\frac{1}{\lambda}{}^t c_1^{-1} & S_2'+S_1 & -\lambda c_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ -\lambda c_N^{-1} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\lambda}{}^t c_{N-1}^{-1} & S_N'+S_{N-1} \end{pmatrix} & * \end{pmatrix}$$

ce déterminant étant égal à :

$$\frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^{N}\det(c_i)}\det\begin{pmatrix} S_1'+S_N & -\lambda c_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\lambda}{}^t c_N^{-1} \\ -\frac{1}{\lambda}{}^t c_1^{-1} & S_2'+S_1 & -\lambda c_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ -\lambda c_N^{-1} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{\lambda}{}^t c_{N-1}^{-1} & S_N'+S_{N-1} \end{pmatrix}$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

Proposition 10. *Il existe un polynôme réel P de degré nN tel que* $\det T_\lambda = P(2-\lambda-\frac{1}{\lambda})$. *Si $2n_h$ désigne le nombre de valeurs propres strictement positives et différentes de 1 de $Df_1(x_1,r_1)$, alors n_h est le nombre de racines strictement négatives de P.*

Démonstration de la proposition 10 : Soit Ξ le polynôme caractéristique de $Df_1(x_1,r_1)$; c'est un polynôme de degré $2n$ qui vérifie :

$$\Xi(\lambda^N) = (-1)^n\lambda^{nN}\prod_{i=1}^{N}\det(c_i)\det T_\lambda.$$

Remarquons que les zéros de $\Xi(X^N)$ sont les racines N-ièmes des racines de $\Xi(X)$, donc $\Xi(X^N)$ a même nombre $2n_h$ de racines strictement positives que Ξ.

De plus :

$$\Xi(\frac{1}{\lambda^N}) = (-1)^n\prod_{i=1}^{N}\det(c_i)\frac{1}{\lambda^{nN}}\det T_{\frac{1}{\lambda}}$$

$$= (-1)^n\prod_{i=1}^{N}\det(c_i)\frac{1}{\lambda^{nN}}\det{}^tT_\lambda = \frac{1}{\lambda^{2nN}}\Xi(\lambda^N)$$

$\Xi(X^N)$ est donc un polynôme réciproque, i.e. il existe un unique polynôme Q de degré nN tel que : $\frac{1}{\lambda^{nN}}\Xi(\lambda^N) = Q(2-\lambda-\frac{1}{\lambda})$, et $P = \frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^N \det(c_i)}Q$ vérifie : $\det T_\lambda = P(2-\lambda-\frac{1}{\lambda})$. Or : $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, 2-\frac{1}{\lambda}-\lambda \in \mathbb{R}_-^* \iff \lambda \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Donc le nombre de racines strictement négatives de P, égal au nombre de racines strictement négatives de Q, est égal à n_h.

□

On s'est donc ramené à compter le nombre de racines strictement négatives du polynôme P. Remarquons que par hypothèse, (x_1, r_1) est un point périodique non dégénéré. Donc 1 est racine d'ordre 2 de Ξ, donc aussi de $\Xi(X^N)$ et donc 0 est racine simple de P. Pour trouver le coefficient dominant de P, on fait tendre λ vers $+\infty$ dans $\det T_\lambda$; on trouve alors :

$$P(X) = \frac{(-1)^{n(N-1)}}{\prod_{i=1}^N \det(c_i)} X(X^{nN-1} + \cdots + (-1)^{nN-1}C).$$

Le nombre n_h de racines strictement négatives de P dépend du signe de C ; plus précisément

- si $C > 0$, $n_h = 0 \pmod 2$;
- si $C < 0$, $n_h = 1 \pmod 2$.

Regardons ce qui se passe pour $\lambda = e^{i\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$: $2-\lambda-\frac{1}{\lambda} = 2(1-\cos\varepsilon) = 4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$. Aussi :

$$\det T_{e^{i\varepsilon}} = P(4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}) \sim_{\varepsilon\to 0} (-1)^{n-1}\frac{4C\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{\prod_{i=1}^N \det(c_i)}.$$

Pour trouver le signe de C, il suffit de trouver un équivalent de $\det T_{e^{i\varepsilon}}$ pour ε tendant vers 0. Commençons par examiner T_1 :

Lemme 11. *Soient $\delta y_1, \ldots, \delta y_N \in \mathbb{R}^n$; alors il existe un unique $\delta\eta = \delta\eta(\delta y_1, \ldots, \delta y_N) \in T_\gamma\mathcal{N}$ tel que :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, (\delta\eta(t_i), \delta\eta(t_{i+1})) = Dg_i(x_i, r_i) \circ D\mathcal{L}(\gamma(t_i), \dot\gamma(t_i))(\delta\eta(t_i), \delta\dot\eta(t_i^+)).$$

Alors :

$$D^2A_L(\gamma)(\delta\eta, \delta\eta) = {}^t(\delta y_1, \ldots, \delta y_N)T_1(\delta y_1, \ldots, \delta y_N)$$

Démonstration du lemme 11 : Le lemme 6 nous permet d'exprimer :

$$D^2A_L(\gamma)(\delta\eta, \delta\eta) = \sum_{i=1}^N \left[(L_{vv}(\delta\dot\eta(t_i^-) - \delta\dot\eta(t_i^+))|\delta\eta(t_i))\right]_{t_i}^{t_{i+1}}$$

Si on note :

$$(\delta x_i, \delta r_i^-) = D\mathcal{L}(\gamma(t_i), \dot\gamma(t_i))(\delta\eta(t_i), \delta\dot\eta(t_i^-))$$

et

$$(\delta x_i, \delta r_i^+) = D\mathcal{L}(\gamma(t_i), \dot\gamma(t_i))(\delta\eta(t_i), \delta\dot\eta(t_i^+))$$

alors : $\delta r_i^- - \delta r_i^+ = L_{vv}(\delta\dot\eta(t_i^-) - \delta\dot\eta(t_i^+))$ donc :

$$D^2 A_L(\gamma)(\delta\eta, \delta\eta) = \sum_{i=1}^N \left[\delta r_i^- - \delta r_i^+ | \delta x_i\right]_{t_i}^{t_{i+1}} = \sum_{i=1}^N \omega((\delta x_i, \delta r_i^-), (\delta x_i, \delta r_i^+))$$

où ω désigne la forme symplectique. Nous allons alors exprimer ces produits symplectiques en coordonnées (symplectiques) Φ_i. Notons $(\delta y_i, \delta p_i^{+-})$ les coordonnées de $(\delta x_i, \delta r_i^{+-})$ dans la carte Φ_i (i.e :

$$(\delta y_i, \delta p_i^{+-}) = D\Phi_i(x_i, r_i)(\delta x_i, \delta r_i^{+-})).$$

Alors :

$$\omega((\delta x_i, \delta r_i^-), (\delta x_i, \delta r_i^+)) = [\delta p_i^- - \delta p_i^+ | \delta y_i].$$

Or :

$$\begin{pmatrix} \delta y_{i+1} \\ \delta p_{i+1}^- \end{pmatrix} = M_i \begin{pmatrix} \delta y_i \\ \delta p_i^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_i S_i' & c_i \\ S_i c_i S_i' - {}^t c_i^{-1} & S_i c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_i \\ \delta p_i^+ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_i(S_i'\delta y_i + \delta p_i^+) \\ (S_i c_i S_i' - {}^t c_i^{-1})\delta y_i + S_i c_i \delta p_i^+ \end{pmatrix}.$$

d'où on tire : $\delta p_i^+ = c_i^{-1}\delta y_{i+1} - S_i'\delta y_i$ et $\delta p_i^- = -{}^t c_{i-1}\delta y_{i-1} + S_{i-1}\delta y_i$ donc :

$$\omega((\delta x_i, \delta r_i^-), (\delta x_i, \delta r_i^+)) = {}^t\delta y_i(-{}^t c_{i-1}^{-1}\delta y_{i-1} + S_{i-1}\delta y_i - c_i^{-1} - \delta y_{i+1} + S_i'\delta y_i)$$

donc : $D^2 A_L(\gamma)(\delta\eta, \delta\eta) =$

$$\sum_{i=1}^N {}^t\delta y_i(S_{i-1} + S_i')\delta y_i - 2{}^t\delta y_i c_i^{-1}\delta y_{i+1} = {}^t(\delta y_1, \dots, \delta y_N) T_1(\delta y_1, \dots, \delta y_N)$$

□

Remarque : Supposons que nous nous soyons intéréssés à des hamiltoniens dépendant du temps 1-périodiques en le temps et non plus à des systèmes autonomes. Dans ce cas, génériquement en topologie C^3, tout point fixe de

f_1 a tous ses multiplicateurs de Floquet différents de 1, et la formule de la proposition 9 donne pour $\lambda = 1$:

$$\frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^N \det(c_i)} \det(Df_1(x_1, r_1) - \mathbf{1}) = \det T_1$$

Aussi, dans ce cas, l'indice de Lefschetz de f_1 en (x, r) est $(-1)^{n+p}$. Malheureusement, le cas qui nous intéresse, autonome, est dégénéré et dans ce cas $\det T_1 = 0$ et il nous faut déterminer plus que le terme constant de P pour trouver l'indice de Lefschetz de l'application de premier retour dans une transversale.

On déduit de ce lemme que T_1 est d'indice p. Par la formule démontrée en lemme 6, on sait que le noyau de $D^2 A_L(\gamma)$ est constitué des solutions des équation linéarisées d'Euler-Lagrange qui sont 1-périodiques. Or, ces solutions engendrent un espace de dimension 1. En effet, comme l'orbite est supposée non dégénéré, cet espace est de dimension au plus 2, et d'au moins un car il contient $\delta\gamma_1 = \dot{\gamma}$. De plus, si on suppose le lagrangien homogène dans la fibre[7], pour tout $\lambda > 0$, $t \to \gamma(\lambda t)$ est encore une solution des équations d'Euler-Lagrange (mais de période non constante). En dérivant par rappport à λ, on en déduit que $(t \in \mathbb{R} \to \delta\gamma_2(t) = t\dot{\gamma}(t))$ est une solution (non périodique) des équations d'Euler-Lagrange linéarisées le long de γ. Les solutions correspondantes aux $\delta\gamma_i$ du flot linéarisé d'Euler-Lagrange sont :

1. $D\varphi_t(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))(\delta\gamma_1(0), \delta\dot{\gamma}_1(0)) = (\delta\gamma_1(t), \delta\dot{\gamma}_1(t)) = (\dot{\gamma}(t), \gamma''(t))$;
2. $D\varphi_t(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))(\delta\gamma_2(0), \delta\dot{\gamma}_2(0)) = (\delta\gamma_2(t), \delta\dot{\gamma}_2(t)) = (t\dot{\gamma}(t), t\gamma''(t) + \gamma'(t))$; aussi :

$$D\varphi_1(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))(\delta\gamma_2(0), \delta\dot{\gamma}_2(0)) = (\delta\gamma_2(0), \delta\dot{\gamma}_2(0)) + (\delta\gamma_1(0), \delta\dot{\gamma}_1(0))$$

   et donc $(\delta\gamma_2(0), \delta\dot{\gamma}_2(0))$ est un vecteur caractéristique mais non propre pour la valeur propre 1 de $D\varphi_1(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$, ce qui prouve que l'espace propre associé à $D\varphi_1(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$ pour la valeur propre 1 est de dimension 1.

Finalement, la nullité (i.e. la dimension du noyau) de T_1 est 1, son indice est p et T_1 a exactement $nN - p - 1$ valeurs propres strictement positives. Or, $T_{e^{i\varepsilon}}$ est une matrice hermitienne proche de T_1 pour ε proche de 0. Son déterminant ne s'annulant qu'aux racines N-ièmes des valeurs propres de $Df_1(x_1, r_1)$ qui sont en nombre fini, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que : $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \det T_{e^{i\varepsilon}} \neq 0$. Aussi, sur $]0, \varepsilon_0[$, l'indice de $T_{e^{i\varepsilon}}$ est constant.

[7]Remarquons que c'est la première fois que nous nous servons de cette hypothèse.

Comme T_1 est d'indice p et de nullité 1, l'indice (constant) de $T_{e^{i\varepsilon}}$ pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ est p ou $p+1$. Nous allons maintenant le déterminer précisément. Cela nous donnera alors le signe de $\det T_{e^{i\varepsilon}}$, dont on déduira celui de C puis la valeur de n_h modulo 2.

Posons :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & {}^t c_N^{-1} \\ {}^t c_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \\ 0 & \dots & 0 & {}^t c_{N-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$T_\lambda = T_1 + (1-\lambda)^t\Delta + (1 - \frac{1}{\lambda})\Delta = T_1 + (1-\cos\varepsilon)(\Delta + {}^t\Delta) + i\sin\varepsilon(\Delta - {}^t\Delta).$$

On sait que la nullité de T_1 est 1. Notons $X_0 = (\delta u_1, \dots, \delta u_N)$ un générateur de son noyau. On sait alors (avec les notations du lemme 11) que la solution brisée des équations linéarisées d'Euler-Lagrange qui lui correspond est $\delta\eta(\delta u_1, \dots, \delta u_N) = \dot\gamma$, qui est la solution 1-périodique des équations d'Euler-lagrange linéarisées le long de γ.

Si on note :

$$S = \begin{pmatrix} S_1' + S_N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & S_2' + S_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & S_N' + S_{N-1} \end{pmatrix}$$

la matrice S est définie positive (puisque c'est le cas de chaque S_i' et chaque S_i d'après le lemme 7) et comme $X_0 \in \ker T_1$: $SX_0 = (\Delta + {}^t\Delta)X_0$ i.e :

$$\forall i, (S_{i+1}' + S_i)\delta u_{i+1} = c_{i+1}^{-1}\delta u_{i+2} + {}^t c_i^{-1}\delta u_i \quad (*)$$

De plus, on a vu que : $D\varphi_t(\gamma(0), \dot\gamma(0))(0, \dot\gamma(0)) = (t\dot\gamma(t), t\gamma''(t) + \gamma'(t))$; cette égalité lue dans les cartes (U_i, g_i) implique que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, R_i(t_i\delta u_i, t_{i+1}\delta u_{i+1}) = (t_{i+1}\delta u_{i+1}, t_{i+2}\delta u_{i+2})$$

ce qui, vu la forme de R_i donnée au lemme 8, s'écrit :

$$-ic_{i+1}{}^t c_i^{-1}\delta u_i + (i+1)c_{i+1}(S_{i+1}' + S_i)\delta u_{i+1} = (i+2)\delta u_{i+2}$$

soit :

$$-i^t c_i^{-1}\delta u_i + (i+1)(S_{i+1}' + S_i)\delta u_{i+1} = (i+2)c_{i+1}^{-1}\delta u_{i+2}$$

ce qui joint à $(*)$ donne : ${}^t c_i^{-1} \delta u_i = c_{i+1}^{-1} \delta u_{i+2}$ soit : $\Delta X_0 = {}^t\Delta X_0$.

Notons alors $\mathcal{H}$ l'hyperplan de $\mathbb{R}^{nN}$ constitué des vecteurs orthogonaux à X_0 (pour le produit scalaire usuel). La restriction de T_1 à $\mathcal{H}$ est non dégénérée et d'indice p. Il en est de même de la restriction de $T_{e^{i\varepsilon}}$ à $\mathcal{H}$ pour ε petit. Notons alors $X_\varepsilon = X_0 + h_\varepsilon$ le vecteur orthogonal à $\mathcal{H}$ pour la forme quadratique non dégénérée $T_{e^{i\varepsilon}}$ (avec $h_\varepsilon \in \mathcal{H}$). Comme la restriction de $T_{e^{i\varepsilon}}$ à $\mathcal{H}$ est d'indice p et que $\mathcal{H}$ et X_ε sont orthogonaux pour $T_{e^{i\varepsilon}}$, il suffit de déterminer le signe de $T_{e^{i\varepsilon}}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)$ pour connaitre l'indice de $T_{e^{i\varepsilon}}$. On calcule donc :

$$T_{e^{i\varepsilon}}(X_\varepsilon, X_\varepsilon) = T_1(X_\varepsilon, X_\varepsilon) + (1-\cos\varepsilon)(\Delta + {}^t\Delta)(X_\varepsilon, X_\varepsilon) + i\sin\varepsilon(\Delta - {}^t\Delta)(X_\varepsilon, X_\varepsilon)$$

comme $T_1 X_0 = 0 = (\Delta - {}^t\Delta)X_0$ et $X_\varepsilon = X_0 + h_\varepsilon$, on a :

$$T_{e^{i\varepsilon}}(X_\varepsilon, X_\varepsilon) =$$

$$T_1(h_\varepsilon, h_\varepsilon) + (1-\cos\varepsilon)(\Delta + {}^t\Delta)(X_\varepsilon, X_\varepsilon) + i\sin\varepsilon(\Delta - {}^t\Delta)(h_\varepsilon, h_\varepsilon) \quad (**)$$

Evaluons alors la taille de h_ε. Déjà : $\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon = 0$ puisque pour ε petit, $T_{e^{i\varepsilon}}$ est proche de T_1 et donc $T_{e^{i\varepsilon}}\mathcal{H}$ est proche de $T_1\mathcal{H} = \mathcal{H}$ et donc l'orthogonal de $\mathcal{H}$ pour $T_{e^{i\varepsilon}}$, qui est l'orthogonal de $T_{e^{i\varepsilon}}\mathcal{H}$ pour le produit scalaire usuel est proche de $\mathbb{R}X_0 = \mathcal{H}^\perp$. On a vu que : $T_{e^{i\varepsilon}} = T_1 + (1-\cos\varepsilon)(\Delta + {}^t\Delta) + i\sin\varepsilon(\Delta - {}^t\Delta)$; aussi : $T_{e^{i\varepsilon}} h_\varepsilon = T_1 h_\varepsilon + O(\varepsilon h_\varepsilon)$. Comme T_1 est symétrique et que $\ker T_1 = \mathbb{R}X_0$, l'orthogonal $\mathcal{H}$ de X_0 est invariant par T_1, et la restriction $\tilde{T}_1$ de T_1 à $\mathcal{H}$ est inversible. De plus par définition de X_ε et h_ε, si $\Pi_{\mathcal{H}}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$ (pour le produit scalaire usuel) : $\Pi_{\mathcal{H}}(T_{e^{i\varepsilon}} h_\varepsilon) = -\Pi_{\mathcal{H}}(T_{e^{i\varepsilon}} X_0)$ soit : $\Pi_{\mathcal{H}}(T_1 h_\varepsilon + O(\varepsilon h_\varepsilon)) = -\Pi_{\mathcal{H}}((1-\cos\varepsilon)SX_0)$ puisque $X_0 \in \ker T_1$, $X_0 \in \ker(\Delta - {}^t\Delta)$ et $SX_0 = (\Delta + {}^t\Delta)X_0$. Comme $T_1 h_\varepsilon \in \mathcal{H}$, cela s'écrit : $T_1 h_\varepsilon = -(1-\cos\varepsilon)\Pi_{\mathcal{H}}(SX_0) + O(\varepsilon h_\varepsilon)$; comme$T_1 h_\varepsilon \in \mathcal{H}$, cela s'écrit : $h_\varepsilon = -(1-\cos\varepsilon)\tilde{T}_1^{-1} \circ \Pi_{\mathcal{H}}(SX_0) + O(\varepsilon h_\varepsilon)$ dont on déduit d'abord que h_ε est un $o(\varepsilon)$, puis un $O(\varepsilon^2)$. En remplaçant dans $(**)$, on trouve alors : $T_{e^{i\varepsilon}}(X_\varepsilon, X_\varepsilon) = (1-\cos\varepsilon)S(X_0, X_0) + o(\varepsilon^2)$ ce qui implique, comme S est définie positive, que $T_{e^{i\varepsilon}}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)$ est positif et que donc $T_{e^{i\varepsilon}}$ est d'indice p.

Donc $\det T_{e^{i\varepsilon}}$ est du signe de $(-1)^p$, donc C est du signe de $(-1)^{n-1-p}$ et le nombre de racines négatives modulo 2 de P est $n-1-p$, ce qui implique bien que modulo 2, n_h coïncide avec $n-1-p$.

4 Démonstration du corollaire 2

Supposons que nous soyons sous les hypothèses du corollaire 2, i.e. que nous considérions un lagrangien L optique et superlinéaire de classe C^3 défini sur le fibré tangent d'une variété M compacte et orientable. Alors, on sait associer à L la *valeur critique* de Mañé notée $c(L)$, qui est la borne inférieure des valeurs $c \in \mathbb{R}$ telles que, si H est le hamiltonien de T^*M associé à L par la dualité de Legendre, alors $\{H < c\}$ contient un graphe exact lagrangien i.e. le graphe de du où $u\ : M \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞. Nous renvoyons le lecteur à [CIPP] pour différentes caractérisations de cette valeur critique.

Nous allons montrer que pour tout $c > c(L)$, l'hypersurface d'énergie $\{H = c\}$ porte une solution périodique qui est soit dégénérée, soit telle que sa dimension hyperbolique réelle est congrue à $n-1$ modulo 2. Pour cela, nous allons introduire un hamiltonien auxiliaire dont nous allons maintenant détailler la construction. Nous détaillons cette construction car nous ne connaissons pas de référence où le détail de la construction est fait, mais nous tenons à signaler que ce genre de construction est bien connu des spécialistes.

Soit donc $u\ : M \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ telle que : $\forall x \in M, H(x, du(x)) < c$. L'application $\Phi\ : T^*M \to T^*M$ définie par $\Phi(x,r) = (x, r + du(x))$ est alors un difféomorphisme symplectique affine dans les fibres ; on pose alors : $\forall (x,r) \in T^*M, K(x,r) = H \circ \Phi(x,r)$; si (f_t) est le flot hamiltonien de H, le flot hamiltonien (g_t) de K vérifie : $g_t = \Phi^{-1} \circ f_t \circ \Phi$. Aussi, si (y,ρ) est un point T-périodique de (g_t) contenu dans $\{K = c\}$ qui admet $2n_h$ multiplicateurs de Floquet hyperboliques sans reflexion, $(x,r) = \Phi(y,\rho)$ est un point T-périodique de (f_t) qui admet le même nombre de multiplicateurs de Floquet hyperboliques sans reflexion ; de plus, dans ce cas : $H(x,r) = K(y,\rho) = c$. Aussi, chercher une orbite périodique pour H sur $\{H = c\}$ revient à chercher une orbite périodique pour K dans $\{K = c\}$, et les deux orbites périodiques ont alors les mêmes multiplicateurs de Floquet pour leurs flots hamiltoniens respectifs. Remarquons, que K, comme H, est strictement convexe dans la fibre, et que si Z_M désigne la section nulle de T^*M, alors $Z_M = \Phi^{-1}(\{(x, du(x)); x \in M\}) \subset \Phi^{-1}(\{H < c\}) = \{K < c\}$, i.e. pour chaque $x \in M$, 0 est dans l'ouvert convexe $\{r \in T_x^*M; K(x,r) < c\}$.

Nous allons alors construire un nouvel hamiltonien $J\ : T^*M \to \mathbb{R}$ qui est convexe dans la fibre, superlinéaire et homogène dans la fibre[8] et tel que $\{J = 1\} = \{H = c\}$. Notre construction s'inspire fortement de celle développée par I. Ekeland dans [Ek]. Pour chaque $x \in M$, l'ensemble $C_x = \{(x,r) \in T_xM; K(x,r) \leq c\}$ est convexe, compact, d'intérieur contenant 0. On peut alors lui associer sa fonction *jauge*, $j_x\ : T^*M \to \mathbb{R}$, définie par : $\forall r \in T^*M, j_x(r) = j(x,r) = \min\{\lambda > 0; (x, \frac{1}{\lambda} r) \in C_x\}$ et $j(x,0) = 0$. La

[8] Il lui correspondra via la dualité de Legendre un lagrangien convexe dans la fibre auquel nous appliquerons les résultats précédents.

fonction j est alors positive et homogène de degré 1 dans la fibre, i.e :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}_+, \forall(x,r) \in T^*M, j(x,\lambda r) = \lambda j(x,r).$$

L'ensemble de ses zéros est alors Z_M. On définit $J\ : T^*M \to \mathbb{R}$ par : $\forall(x,r) \in T^*M, J(x,r) = [j(x,r)]^2$.

Proposition 12. *La fonction J est de classe C^1 sur T^*M et de classe C^3 sur $T^*M\backslash Z_M$. De plus, elle est positivement homogène de degré 2 et vérifie : $\forall(x,r) \in T^*M\backslash Z_M$, $\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}(x,r)$ est définie positive.*

Démonstration de la proposition 12 : Le fait que J soit positivement homogène de degré 2 découle du fait que j est positivement homogène de degré 1.

Pour montrer que J est de classe C^3 sur $T^*M\backslash Z_M$, montrons que $\frac{1}{j}$ est de classe C^3 sur $T^*M\backslash Z_M$. Or, $\frac{1}{j}$ est défini par : $K(x, \frac{1}{j(x,r)}.r) = c$. Considérons alors la fonction : $F\ : (T^*M\backslash Z_M) \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x,r,t) = K(x,t.r)$; alors $F(x,r,.)$ est de classe C^3, strictement convexe en t et atteint son minimum au point de T_x^*M qui est dans l'intérieur de C_x, donc pas sur $\{K = c\}$; aussi : $\forall(x,r,t) \in T^*M\backslash Z_M, F(x,r,t) = c \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(x,r,t) > 0$. Le théorème des fonctions implicites donne alors que $\frac{1}{j}$ donc j et J sont de classe C^3 sur $T^*M\backslash Z_M$.

De plus, comme J est positivement homogène de degré 2 dans la fibre, alors $\frac{\partial J}{\partial x}$ est homogène de degré 2 dans la fibre et $\frac{\partial J}{\partial r}$ est homogène de degré 1 dans la fibre. On en déduit que uniformément en $x \in M$: $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\partial J}{\partial r}(x,r) = 0$ et $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\partial J}{\partial x}(x,r) = 0$. On en déduit alors successivement :

1. étant continue dans la fibre, de classe C^1 ailleurs que sur la section nulle et sa dérivée partielle suivant r se prolongeant par continuité en 0 sur la section nulle, J est différentiable suivant r en tout point de la section nulle Z_M et sa différentielle partielle suivant r en un tel point est nulle ; cette dérivée partielle dépend même continument du point ;
2. J étant nulle sur la section nulle y admet 0 comme dérivée partielle suivant x ; comme la dérivée partielle suivant x est positivement homogène de degré 2 celle-ci est donc continue ;
3. admettant des dérivées partielles en tout point qui dépendent continument du point, J est de classe C^1 sur T^*M.

En différentiant par rapport à r l'égalité : $K(x, \frac{1}{j(x,r)}r) = c$, on trouve :

$$j(x,r).\frac{\partial K}{\partial r}(x, \frac{1}{j(x,r)}r).\delta r = (\frac{\partial K}{\partial r}(x, \frac{1}{j(x,r)}r).r)(\frac{\partial j}{\partial r}(x,r).\delta r)$$

donc on redifférentiant :

$$(\frac{\partial j}{\partial r}\delta r')(\frac{\partial K}{\partial r}.\delta r)+\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}(\delta r',\delta r)-\frac{1}{j}(\frac{\partial j}{\partial r}.\delta r')\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}(r,\delta r)=-\frac{1}{j^2}\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}(r,r)$$

$$(\frac{\partial j}{\partial r}\delta r')(\frac{\partial j}{\partial r}.\delta r)+\frac{1}{j}\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}(\delta r',r)(\frac{\partial j}{\partial r}.\delta r)+(\frac{\partial K}{\partial r}.r)\frac{\partial^2 j}{\partial r^2}(\delta r',\delta r)+(\frac{\partial K}{\partial r}\delta r')(\frac{\partial j}{\partial r}.\delta r)$$

dont on tire en faisant $\delta r=\delta r'$:

$$(\frac{\partial K}{\partial r}.r)\frac{\partial^2 j}{\partial r^2}(\delta r,\delta r)=\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}(\delta r-\frac{1}{j}(\frac{\partial j}{\partial r}\delta r)r,\delta r-\frac{1}{j}(\frac{\partial j}{\partial r}\delta r)r)\geq 0$$

Or on a vu que $(\frac{\partial K}{\partial r}.r)>0$ (car $(\frac{\partial K}{\partial r}.r)=\frac{\partial F}{\partial t}(x,r,t)>0$), donc $\frac{\partial^2 j}{\partial r^2}(\delta r,\delta r)\geq 0$. Et même, comme $\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}$ est définie positive, pour tout $\delta r\notin\mathbb{R}r$, $\frac{\partial^2 j}{\partial r^2}(\delta r,\delta r)>0$. Or, comme $J=j^2$, on a :

$$\forall\delta r,\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(\delta r,\delta r)=2j\frac{\partial^2 j}{\partial r^2}(\delta r,\delta r)+2(\frac{\partial j}{\partial r}\delta r)^2$$

Si $\delta r\notin\mathbb{R}r$, on a vu que le premier terme de la somme est strictement positif, donc $\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(\delta r,\delta r)>0$; si $\delta r=r$, comme j est homogène de degré 1, par l'identité d'Euler : $\frac{\partial j}{\partial r}\delta r=j(r)\neq 0$ donc le second terme de la somme est strictement positif et le premier positif, donc $\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}$ est bien définie positive.

□

Etant donné une hypersurface d'énergie régulière $\mathcal{E}$ d'un hamiltonien H, on sait que les orbites du flot hamiltonien tracées sur $\mathcal{E}$ ne dépendent que de la surface d'énergie et pas du hamiltonien lui même (en chaque point $x\in\mathcal{E}$, le champ de vecteurs est dirigé par le noyau de la forme symplectique restreinte à $T_x\mathcal{E}$, et donc sa direction est uniquement déterminée par l'hypersurface d'énergie). Deux hamiltoniens H_1 et H_2 qui ont une même hypersurface $\mathcal{E}$ d'énergie régulière ont donc leurs flots restreints à $\mathcal{E}$ qui se déduisent l'un de l'autre par une reparamétrisation (du temps) ; aussi, si $(x,r)\in\mathcal{E}$ est un point périodique pour le flot hamiltonien de H_1, c'est aussi un point périodique pour le flot hamiltonien de H_2 (la période peut toutefois changer) et (x,r) a les mêmes multiplicateurs de Floquet pour les deux flots hamiltoniens. Or, nous avons vu que $\{K=c\}=\{J=1\}$. On s'est donc ramené à trouver une orbite périodique pour J sur $\{J=1\}$ ayant les multiplicateurs de Floquet recherchés pour le flot (h_t) de J. En fait, il suffit même de trouver une orbite périodique pour (g_t) en dehors de la section nulle, comme le prouve le résultat suivant :

Proposition 13. *Soit $k > 0$; alors $(t \to h_t(x,r) = (x(t), r(t)))$ est une orbite incluse dans $J^{-1}(k)$ si et seulement si $(t \to (x(\frac{t}{\sqrt{k}}), \frac{1}{\sqrt{k}} r(\frac{t}{\sqrt{k}})))$ est une orbite incluse dans $J^{-1}(1)$.*

Cette proposition découle de l'homogénéité de degré 2 dans la fibre du hamiltonien. Si l'orbite décrite dans cette proposition est périodique et dans une certains classe d'homotopie, il en est de même de la nouvelle orbite obtenue comme indiqué dans cette proposition. C'est pourquoi il suffit de trouver une orbite périodique pour (g_t) dans une classe d'homotopie en dehors de la section nulle pour en déduire une orbite pour (g_t) dans cette même classe d'homotopie et tracée sur $\{J = 1\}$. De plus, les deux orbites considérées ont alors mêmes multiplicateurs de Floquet. Notre problème est donc maintenant réduit à trouver une orbite périodique pour le flot (h_t) de J qui soit en dehors de la section nulle et dans la classe d'homotopie voulue.

Or, comme J est de classe C^1, on peut définir une application $\ell : T^*M \to TM$[9] par :

$$\ell(x,r) = (x, \frac{\partial J}{\partial r}(x,r))$$

L'application ℓ restreinte à $T^*M \backslash Z_M$ est un difféomorphisme d'image le complémentaire dans TM de la section nulle ; de plus, ℓ est continue et vaut l'"identité" sur la section nulle ; elle se prolonge donc en un homéomorphisme de T^*M sur TM. Remarquons que cet homéomorphisme est positivement homogène de degré 1 dans la fibre. Le lagrangien L_0 associé à J est défini par : $L_0(x,v) = r(v) - J(x,r)$ où on a : $(x,v) = \ell(x,r)$ i.e : $(x,r) = \ell^{-1}(x,v)$. Comme J est homogène de degré 2, on peut utiliser l'identité d'Euler qui donne : $L_0(x,v) = H_0 \circ \ell^{-1}(x,v)$. On en déduit que L_0 est positivement homogène de degré 2 dans la fibre. De plus, les propriété générales de la dualité de Legendre permettent d'affirmer que L_0 est de classe C^3 et strictement convexe en dehors de la section nulle (voir [Man] par exemple : il y a une relation entre les dérivées partielles de J et L_0) ; la même démonstration que celle faite pour J montre que L_0 est de classe C^1 sur TM.

On peut alors écrire les équations d'Euler-Lagrange pour L_0 en tout point en dehors de la section nulle. Si $(x_t, v_t)_{t\in[0,1]}$ est une orbite périodique pour le flot d'Euler-Lagrange de L_0 qui ne rencontre pas la section nulle, $(\ell^{-1}(x_t, v_t))_{t\in[0,1]}$ est une orbite périodique pour le flot hamiltonien de J en dehors de la section nulle, qui est dans la même classe d'homotopie que $(x_t, v_t)_{t\in[0,1]}$. De plus, par le théorème 1, si $(x_t, v_t)_{t\in[0,1]}$ minimise l'action lagrangienne, alors $(\ell^{-1}(x_t, v_t))_{t\in[0,1]}$ est une orbite périodique pour le flot hamiltonien de J qui est soit dégénérée, soit à un exposant de Floquet

[9] Il s'agit d'une application réciproque d'application de Legendre

hyperbolique sans réflexion si la dimension de M est paire. Pour montrer le corollaire 2, il suffit donc de trouver une orbite périodique qui soit minimisante de l'action lagrangienne A_{L_0} et en dehors de la section nulle.

L'idée est alors d'utiliser le théorème de Tonelli pour trouver un lacet minimisant dans la classe d'homotopie (non nulle) fixée. Il faut une version de ce théorème qui soit valable pour les hamiltoniens de classe C^1, ce qui est le cas de la version donnée dans [Fa]. Ce résultat s'énonce comme suit[10] :

"Soit $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangien C^1, convexe dans la fibre et superlinéaire. On suppose que le lagrangien L est minoré par une métrique riemannienne sur M ; alors dans chaque classe d'homotopie il existe un lacet minimisant parmi les lacets absolument continus dans cette classe d'homotopie."

Pour appliquer ce théorème, nous devons juste vérifier que L est minoré par une métrique riemannienne. Or, si on munit M d'une métrique riemannienne et si on pose $m = \min\{L_0(x,v); \|v\| = 1\}$, alors par homogénéité de L_0, on a : $\forall (x,v) \in TM, L_0(x,v) \geq m\|v\|^2$ ce qui donne le résultat cherché pour $m\|.\|^2$.

Il nous reste à montrer que si la classe d'homotopie considérée n'est pas nulle, le lacet trouvé $\gamma_0 : [0,1] \to M$ est une solution des équations d'Euler-Lagrange qui est en dehors de la section nulle.

Proposition 14. *Soit α une classe d'homotopie dans M et $\gamma_0 : [0,1] \to M$ un lacet absolument continu minimisant l'action lagrangienne dans cette classe d'homotopie. Alors γ_0 est de classe C^1, $\frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0, \dot\gamma_0)$ est aussi de classe C^1 et γ_0 vérifie les équations d'Euler-Lagrange pour L_0 :*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\right) = \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t)).$$

Démonstration de la proposition 14 : La variété étant compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de cartes (V_i, h_i) dans lesquelles désormais nous travaillerons (ce qui nous permettra de "soustraire des points"). Rappelons aussi que nous l'avons munie d'une métrique riemannienne qui définit une distance d sur M. On peut supposer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que deux points de M ε_0-proches sont contenus dans une même carte V_i, et on écrira la soustraction dans cette carte. Montrons alors :

Lemme 15. *Il existe une constante $R > 0$ telle que, quels que soient $(x,v) \in TM$ et $(x',v') \in TM$ tels que $d(x,x') < \varepsilon_0$, on a :*

$$|L_0(x',v') - L_0(x,v) - \frac{\partial L_0}{\partial x}(x,v)(x'-x) - \frac{\partial L_0}{\partial v}(x,v)(v'-v)|$$

[10] Pour être tout à fait honnète dans [Fa] A. Fathi s'intéresse à la recherche de minima à extrémités fixées, mais notre énoncé ne demande qu'une légère adaptation de sa preuve

$$\leq R(1 + \|v\| + \|v'\|)^2(d(x, x') + \|v - v'\|)^2.$$

Démonstration du lemme 15 : Comme L_0 est positivement homogène dans la fibre, $\frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 L_0}{\partial x \partial v}$ et $\frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}$ sont aussi positivement homogènes dans la fibre, de degrés 2, 1, 0 respectivement. Posons alors :

$$C_1 = \max\{\max\{\|\frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2}(x, v)\|, \|\frac{\partial^2 L_0}{\partial x \partial v}(x, v)\|, \|\frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}(x, v)\|\}; \|v\| = 1\}$$

A cause de ces homogénéités, on a : $\forall (x, v) \in TM$,

$$\|\frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2}(x, v)\| \leq C_1 \|v\|^2, \|\frac{\partial^2 L_0}{\partial x \partial v}(x, v)\| \leq C_1 \|v\|, \|\frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}(x, v)\| \leq C_1 \quad (*)$$

Soient maintenant (x, v) et (x', v') comme dans l'énoncé du lemme 15. posons alors pour chaque $t \in [0, 1]$: $(x_t, v_t) = (x, r) + t(x' - x, v' - v)$ et $f(t) = L_0(x_t, v_t)$. Alors f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$, et même de classe C^2 sauf en éventuellement un point noté t_0 car soit v_t ne s'annule pas, soit v_t est identiquement nulle, soit v_t ne s'annule qu'en un point. Soit alors μ un majorant de $|f''|$. On a alors : $\forall t \in [0, 1] \backslash \{t_0\}, |f''(t)| \leq \mu$. En intégrant, comme f' est continue, on obtient : $\forall t \in [0, 1], |f'(t) - f'(0)| \leq \mu t$ donc en intégrant encore : $\forall t \in [0, 1], |f(t) - f(0) - f'(0)t| \leq \frac{\mu t^2}{2}$.

Evaluons alors μ : $f(t) = L_0(x_t, v_t)$ donc $f'(t) = \frac{\partial L_0}{\partial x}(x_t, v_t)(x' - x) + \frac{\partial L_0}{\partial v}(x_t, v_t)(v' - v)$ donc : $f''(t) = \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2}(x_t, v_t)(x' - x, x' - x) + 2\frac{\partial^2 L_0}{\partial x \partial v}(x_t, v_t)(x' - x, v' - v) + \frac{\partial^2 L_0}{\partial v^2}(x_t, v_t)(v' - v, v' - v)$. Aussi, à cause des inégalités données en $(*)$[11] :

$$|f''(t)| \leq C_1 \|v_t\|^2 d(x, x')^2 + 2C_1 \|v_t\| \|v - v'\| d(x, x') + C_1 \|v - v'\|^2.$$

Ceci donne le résultat voulu pour $R = C_1$ si on remarque que $\|v_t\| \leq \|v\| + \|v'\|$. □

Soit $t_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Il existe alors un indice i, un voisinage $[a, b]$ de t_0 et un voisinage convexe W de 0 dans $\mathbb{R}^{\dim M}$ tels que : $\forall t \in [a, b], \forall v \in W, \gamma_0(t) + v \in V_i$. Pour toute application $\delta\gamma : [0, 1] \to W$ de classe C^∞ nulle en dehors de $[a, b]$, on peut définir : $\gamma_0 + \delta\gamma : [0, 1] \to M$ par : $\forall t \in [a, b], (\gamma_0 + \delta\gamma)(t) = \gamma_0(t) + \delta\gamma(t)$ et $\forall t \notin [a, b], (\gamma_0 + \delta\gamma)(t) = \gamma_0(t)$. Alors $\gamma_0 + \delta\gamma$ est un lacet absolument continu qui est dans la même classe d'homotopie que γ_0 ; il en est

[11] Il y a une petite inexactitude dont nous ne tenons pas compte pour ne pas alourdir : la norme de $\|x' - x\|$ dans la carte V_i n'est pas $d(x, x')$ mais on a ainsi des distances équivalentes.

de même de $\gamma_0 + \lambda\delta\gamma$ pour tout $\lambda \in [0,1]$. Aussi, comme γ_0 est minimisante, on a : $\forall\lambda \in [0,1], A_{L_0}(\gamma_0 + \lambda\delta\gamma) \geq A_{L_0}(\gamma_0)$ c-à-d :

$$\int_0^1 L_0(\gamma_0(t) + \lambda\delta\gamma(t), \dot\gamma_0(t) + \lambda\delta\dot\gamma(t))dt \geq \int_0^1 L_0(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))dt.$$

Or, si $\|\delta\gamma\| < \varepsilon_0$, on peut déduire du lemme 15 :

$$|L_0(\gamma_0(t)+\lambda\delta\gamma(t), \dot\gamma_0(t)+\lambda\delta\dot\gamma(t)) - L_0(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t)) - \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\lambda\delta\gamma(t)$$

$$-\frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\lambda\delta\dot\gamma(t)| \leq \lambda^2 R(1+2\|\dot\gamma_0(t)\|+\|\delta\gamma(t)\|)^2(\|\delta\gamma(t)\|+\|\delta\dot\gamma(t)\|)^2$$

En intégrant, on en déduit :

$$|A_{L_0}(\gamma_0 + \lambda\delta\gamma) - A_{L_0}(\gamma_0) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\delta\gamma(t)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\delta\dot\gamma(t)\right) dt| \leq \lambda^2 \times \text{constante}$$

Comme : $\forall\lambda, A_{L_0}(\gamma_0 + \lambda\delta\gamma) \geq A_{L_0}(\gamma_0)$, ceci implique que :

$$0 = \int_0^1 \left(\frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\delta\gamma(t) + \frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\delta\dot\gamma(t)\right) dt \quad (**)$$

Or, on sait que $\dot\gamma_0 \in L^2$ (puisque γ_0 est d'action bornée pour L_0 qui est minorée par une métrique riemannienne), donc $\frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0, \dot\gamma_0) \in L^1$ (puisque $|\frac{\partial L_0}{\partial x}(x,v)| \leq C_1\|v\|^2$ par $(*)$) ; aussi,

$$(u,t) \in [0,1]^2 \to \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\delta\gamma(u)$$

est aussi dans L^1. En remarquent que $\delta\gamma(t) = \int_a^y \delta\dot\gamma(s)ds$, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_a^{a+1} \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\delta\gamma(t)dt = \int_a^{a+1} \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t)) \int_a^t \delta\dot\gamma(u)dudt$$

$$= \int_a^{a+1} \left(\int_u^{a+1} \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))dt\right) \delta\dot\gamma(u)du.$$

$(**)$ donne alors :

$$0 = \int_a^{a+1} \left(\int_u^{a+1} \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))dt + \frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0(u), \dot\gamma_0(u))\right) \delta\dot\gamma(u)du;$$

cette égalité étant vraie pour tout $\delta\gamma\ : [0,1] \to V_i$ de classe C^∞, nul en dehors de $[a,b]$ et tel que $\|\delta\gamma\| < \varepsilon_0$. La fonction :

$$u \in [a, a+1] \mapsto g(t) = \left(\int_u^{a+1} \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))dt + \frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0(u), \dot\gamma_0(u))\right)$$

est donc une fonction de L^1 telle que pour tout tel $\delta\gamma$: $\int_a^{a+1} g(t)\delta\dot\gamma(t)dt = 0$. La fonction g est donc une fonction de L^1 telle que pour tout $\delta\eta\ : [a,b] \to W$ vérifiant $\|\delta\eta\|_\infty < \varepsilon_0$ (on a $\delta\eta = \delta\dot\gamma +$ constante) à support dans $[a,b]$:

$$\int_a^b (g(t) - \int_a^b g(s)ds)\delta\eta(t)dt = 0;$$

ceci implique que pour presque tout $t \in [a,b]$: $g(t) - \int_a^{a+1} g(s)ds = 0$ i.e. que g est constante presque partout dans $[a,b]$. Il existe donc un ensemble I de mesure pleine dans $[a,b]$ et une constante k tels que :

$$\forall t \in I, \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t)) = k - \int_t^{a+1} \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma_0(u), \dot\gamma_0(u))du \quad (***)$$

Le terme de droite de cette égalité est une fonction continue (puisqu'une primitive d'une fonction L^1). On en déduit que $(t \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))$ coïncide sur I avec une fonction continue. Or, on a : $(\gamma_0, \dot\gamma_0) = \ell\left(\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma_0, \dot\gamma_0)\right)$ avec ℓ continue, donc $\dot\gamma_0$ coïncide presque partout sur $[a,b]$ avec une fonction continue. Comme de plus γ_0 est absolument continue, on a (on peut écrire tout ceci en cartes) :

$$\forall t \in [a,b], \gamma_0(t) = \gamma_0(a) + \int_a^t \dot\gamma_0(u)du$$

donc finalement γ_0 est de classe C^1 sur $[a,b]$. L'égalité $(***)$ est alors valable sur $[a,b]$ tout entier et son membre de droite est une fonction de classe C^1. On en déduit que $(t \in [a,b] \mapsto \frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t)))$ est de classe C^1 et que :

$$\forall t \in [a,b], \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\right) = \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t)).$$

□

Finissons la démonstration du corollaire 2. Par la proposition 14, on sait que γ_0 vérifie les équations d'Euler-Lagrange pour L_0 :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial v}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t))\right) = \frac{\partial L_0}{\partial x}(\gamma_0(t), \dot\gamma_0(t)).$$

Aussi, si on pose $(x_t, r_t) = \ell^{-1}(\gamma_0(t), \dot{\gamma}_0(t))$, (x_t, r_t) vérifie les équations de Hamilton pour J. C'est donc une solution des équation de Hamilton pour J. $(t \mapsto J(x_t, r_t) = J \circ \ell^{-1}(\gamma_0(t), \dot{\gamma}_0(t)))$ est constant. Or, si cette constante était nulle, le lacet serait constant donc homotope à un point. Forcément donc, cette constante est non nulle et l'orbite ne rencontre pas la section nulle.
Remarque : Notre construction d'un nouvel hamiltonien J qui a en commun une hypersurface d'énergie avec K et qui est strictement convexe et homogène de degré 2 dans la fibre est à rapprocher d'une construction classique concernant les systèmes mécaniques. Considérons une fonction $U : M \to \mathbb{R}$ de classe C^3 et une métrique riemannienne g sur TM ; on définit alors un lagrangien $L : TM \to \mathbb{R}$ par : $L(x, v) = \frac{1}{2}g(x)(v, v) - U(x)$. La valeur critique de Mañé est alors $\mu = \max U$. Il est usuel d'associer à tout $k > \mu$ une métrique riemannienne G, dite métrique de Jacobi, définie par :

$$\forall (x, v) \in TM, G(x)(v, v) = \frac{1}{2}(k - U(x))g(x)(v, v.)$$

Notons alors H le hamiltonien associé à L via la dualité de Legendre et H_0 celui associé à G ; un résultat classique (voir [Arno]) affirme que toute orbite du flot hamiltonien (f_t) de H tracée sur $\{H = k\}$ est une orbite du flot hamiltonien (géodésique) (g_t) de H_0. En fait, on a : $\{H = k\} = \{H_0 = 1\}$ et donc le hamiltonien H_0 coïncide , dans ce cas, avec le hamiltonien J que nous avons construit dans le cas optique général. La construction que nous avons faites dans cette section peut donc être vue comme une extension de la métrique de Jacobi.

Bibliographie.

[Arna] M.-C. Arnaud. On the type of certain periodic orbits minimizing the Lagrangian action, *Nonlinearity* **11** (1998) 143-150.

[Arno] V. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Editions MIR.Moscou (1976).

[Bos] Jean-Benoît Bost. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, ...). Seminaire Bourbaki, Vol. 1984/85. Astérisque No. **133-134** (1986), 113–157.

[Cha] Marc Chaperon. Une idée du type "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **298** (1984), no. 13, 293–296.

[Che] A. Chenciner. Systèmes dynamiques différentiables, *article à l'Encyclopedia Universalis*

[CI] G. Contreras & R. Iturriaga. Convex Hamiltonians without conjugate points, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **19** (1999), 901-952.

[CIPP] G. Contreras, R. Iturriaga, G. P. Paternain & M. Paternain. Lagrangian graphs, minimizing measures and Mañé critical values, *GAFA* **8** (1998) 788-809.

[Dou] R. Douady. Applications du théorème des tores invariants *Thèse de 3ème cycle* (1982)

[Du] J. J. Duistermaat. On the Morse index in variational calculus, *Adv. Math.* **21** (1976) 173-195.

[Ek] I. Ekeland. *Convexity methods in Hamiltonian mechanics* , Springer Verlag (1990)

[Fa] A. Fathi, *Weak KAM Theorems in Lagrangian Dynamics*, Cours à l'ENS Lyon (2003).

[Go] C. Golé.*Symplectic twist maps*, Global variational techniques. Advanced Series in Nonlinear Dynamics, **18** World Scientific Publishing Co. (2001).

[Jos] Josellis, Frank W. Lyusternik-Schnirelman theory for flows and periodic orbits for Hamiltonian systems on $T^n \times R^n$. *Proc. London Math. Soc.* **68** (1994), no. 3, 641–672.

[KoMe] H.-T. Kook & J. D. Meiss. Periodic orbits for reversible, symplectic mappings *Phys. D* **35** (1989), no. 1-2, 65–86.

[MacMe] R. S. MacKay & J. D. Meiss. Linear stability of periodic orbits in Lagrangian systems. *Phys. Lett. A* **98** (1983), no. 3, 92–94.

[Man] R. Mañe. *Global Variational Methods in Conservative Dynamics*, IMPA, Rio de Janeiro. Lecture notes, 18 Colóquio Brasileiro de Mathemática (1991).

[Mil] J. Milnor. *Morse theory*, Annals of Mathematics studies **51**, Princeton University Press, (1973), p 83.

[Off1] D. Offin. Hyperbolic minimizing geodesics, *Trans. Amer. Math. Soc*, **352** (2000) 3323-3338.

[Off2] D. Offin, Maslov index and hyperbolicity of periodic orbits on energy surfaces, preprint 2003.

[Poi] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (1899), **t3**, Blanchard (1987) 283-285.