Création de connexions en topologie C^1

Marie-Claude ARNAUD *

30 avril 2013

Résumé. Dans cet article , nous allons commencer par démontrer un résultat perturbatif et en déduire différentes manières de créer des connexions à l'aide de perturbations de difféomorphismes petites en topologie C^1. Ensuite, nous nous intéresserons plus spécifiquement à la place des variétés stables des points périodiques hyperboliques ainsi qu'à la fermeture d'orbites récurrentes en un sens faible ; puis, nous ferons une étude plus fine des difféomorphismes de classe C^1 "génériques", montrant en particulier l'existence d'attracteurs au sens de Liapounov transitif en un certain sens faible ; enfin, nous expliquerons ce qui se passe pour les difféomorphismes qui préservent une forme volume finie.

Mots clés. perturbations, connexions, attracteurs au sens de Liapounov, intersections homoclines

Code matière AMS (1991). 58F30, 58F99, 58F22

*CNRS UMR 8628, Laboratoire de Topologie, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.

Table des matières

1 Introduction.

Dans cet article , nous allons commencer par démontrer un résultat perturbatif et en déduire différentes manières de créer des connexions à l'aide de perturbations de difféomorphismes petites en topologie C^1. Dans le cas d'une variété compacte, ce résultat est essentiellement dû à S. Hayashi (voir [8] ou pour une autre démonstration [17]). Ensuite, nous nous intéresserons plus spécifiquement à la place des variétés stables des points périodiques hyperboliques ainsi qu'à la fermeture d'orbites récurrentes en un sens faible ; puis, nous ferons une étude plus fine des difféomorphismes de classe C^1 "génériques" ; enfin, nous expliquerons ce qui se passe pour les difféomorphismes qui préservent une forme volume finie. Expliquons ceci plus précisément :

1.1 Des résultats perturbatifs.

Le premier résultat perturbatif que nous allons démontrer est le suivant (l'ensemble des difféomorphismes de classe C^1 de la variété sera muni de la topologie C^1 de Whitney) :

Theorème 1 *Soit M une variété (éventuellement non compacte) de classe C^∞, f un difféomorphisme de classe C^k $(k \geq 1)$ de M, p_0 un point de M non périodique pour f telle que la suite $(f^n p_0)_{n\geq 1}$ a au moins une valeur d'adhérence.*

Soit U un voisinage de f en topologie C^1.

Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que, pour tout V voisinage de p_0, il existe W voisinage de p_0 inclus dans V vérifiant :

si $(p, q) \in M^2$ sont tels que :

- ni p, ni q n'est élément de $\displaystyle\bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(V)$;

- il existe n_p, n_q entiers plus grands que 1 tels que $f^{n_p}p \in W$ et $f^{-n_q}q \in f^n W$;

alors il existe $g \in U$ de classe C^k égal à f en dehors de $\displaystyle\bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(V)$ et tel que q est sur l'orbite positive de p sous g en transitant par V.

De plus, il existe alors V_0 voisinage de p_0 tel que tout élément de V_0 vérifie les mêmes conclusions que p_0 avec le même N.

En d'autres termes, si p_0 est un point non périodique de f dont l'orbite positive ne tend pas vers l'infini, si p et q sont deux points de M tels que l'orbite positive (resp. négative) de p (resp. q) passe suffisamment "près" de p_0, on peut trouver une perturbation g de f proche de f en topologie C^1 qui permet de connecter p à q (i.e. q est sur l'orbite positive de p sous

g). Dans le cas d'une variété compacte, ce résultat est essentiellement dû à S. Hayashi (voir [8] ou pour une autre démonstration [17]).

Un résultat similaire pour les flots en dimension 2 avait été obtenu dans [3]. La démonstration présentée dans ce cas avait l'avantage d'être relativement simple à cause de la dimension. Le cas que nous envisageons dans cet article est plus compliqué, puisqu'il requiert de faire appel simultanément :

- aux techniques de S. Hayashi développées dans [8] ;
- au difficile résultat algébrique de C. Pugh démontré dans [14], résultat utilisé dans [16] pour démontrer de "closing lemma" en topologie C^1.

Rappelons que la condition "la suite $(f^n(p_0))_{n\geq 1}$ a au moins une valeur d'adhérence" est une condition nécessaire, puisque C. Pugh a donné un exemple (de flot) dans [15] pour lequel cette suite n'a pas de valeur d'adhérence (M est donc non compacte) et on ne peut trouver de perturbation g comme dans l'énoncé.

L'intéret d'un énoncé du type de celui du théorème 1 est qu'il permet de créer des *connexions* :

1. par exemple, ce théorème peut permettre de connecter p à q quand $\omega(p,f)\cap\alpha(q,f)\neq\emptyset$, où $\omega(p,f)$ désigne l'ensemble ω-limite de p sous f, c'est à dire l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(f^n p)_{n\geq 1}$ et $\alpha(q,f)=\omega(q,f^{-1})$ (en supposant en plus que cette intersection contient un point non périodique et quand la variété est compacte, ce résultat, annoncé par S. Hayashi dans [7] est démontré dans [18] par L. Wen et Z. Xia) ; il permet aussi de créer des connexions à l'aide morceaux de variétés stables et instables de points périodiques hyperboliques, voire des intersections hétéroclines ; ce sera l'objet de la section 1.2 ;
2. en fait, nous verrons que ce théorème permet de montrer que pour f suffisamment général, une certaine relation est transitive et nous permettra de mettre en évidence en section 1.3 de façon surprenante des ensembles stables au sens de Liapounov et faiblement transitifs ;
3. nous montrerons alors en section 1.4 que certains de ces ensembles stables au sens de Liapounov sont des classes homoclines, donc vraiment transitif ;

4 enfin, en section 1.5, nous nous pencherons plus spécifiquement sur les cas des difféomorphismes qui préservent le volume.

Le problème concernant par exemple 1. est que les points de $\omega(p,f)\cap\alpha(q,f)$ (appelés p_0 dans l'énoncé du théorème 1) peuvent être périodiques, cas que nous avons écarté dans l'énoncé du théorème 1 (ce cas est aussi écarté dans tous les résultats de S. Hayashi et L. Wen & Z. Xia cîtés précédemment). Heureusement, dans le cas où les points périodiques de f sont hyperboliques, on peut utiliser les méthodes [8] de S. Hayashi concernant la création de connexions hétéroclines ainsi que la structure des difféomorphismes au voisinage des points périodiques hyperboliques, ce qui permet quand-même d'obtenir un résultat. Avant de l'énoncer, donnons une définition ($\mathrm{Diff}^k(M)$ désignera l'ensemble des difféomorphismes de classe C^k de M) :

DEFINITION : Soit $p \in M$ et $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. On définit :

• $F(p,f)$ (F comme "forward") est l'ensemble des points $q \in M$ tels qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de M et une suite d'entiers strictement positifs $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ et $\lim_{n\to\infty} f^{i_n}x_n = q$;

• $B(p,f) = F(p,f^{-1})$ (B comme "backward").

REMARQUE : remarquons que $F(p,f)$ contient l'orbite strictement positive de p.
Remarquons aussi que : $\forall (x,y) \in M^2, y \in F(x,f) \Leftrightarrow x \in B(y,f)$.

Proposition 2 *Soit M une variété de classe C^∞, f un difféomorphisme de classe C^k ($k \geq 1$) de M et p_0 un point de M qui est :*
– soit périodique hyperbolique ;
– soit non périodique et tel que la suite $(f^n p_0)_{n\geq 1}$ a au moins une valeur d'adhérence.
Soit U un voisinage de f en topologie C^1 (pour la topologie C^1 de Whitney).
Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que, pour tout V voisinage de p_0,
si $(p,q) \in M^2$ sont tels que :
- ni p, ni q n'est élément de $\bigcup_{0\leq n\leq N} f^n(\overline{V})$;
- $p_0 \in F(p,f) \cap B(q,f)$;
alors pour tous voisinages V_p et V_q de p et q respectivement, il existe $g \in U$ de classe C^k égal à f en dehors de $\bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(V)$ et tel que $\bigcup_{n\geq 1} g^n(V_p) \cap V_q \neq \emptyset$.

Rappelons que l'ensemble des difféomorphismes de M de classe C^k dont tous les points périodiques sont hyperboliques est un G_δ- dense de $\mathrm{Diff}^k(M)$, ensemble des difféomorphismes de classe C^k de M, que ce soit pour la topologie C^k ou C^1. Ainsi, l'hypothèse "p_0 non périodique ou périodique hyperbolique" n'est pas trop restrictive.

Quitte à utiliser une petite perturbation au voisinage de p et q si $p \neq q$, on déduit facilement de l'énoncé précédent que si $p \neq q$, il existe $h \in U$ qui connecte p à q. En fait, nous allons voir dans la section suivante qu'on obtient une réponse positive aussi dans le cas où $p = q$; de même, nous regarderons ce qui se passe dans le cas particulier où p (resp. q) est sur la variété stable d'un point périodique hyperbolique (resp. sur la variété instable d'un point périodique hyperbolique), ce qui permet par exemple de retrouver le résultat d'Hayashi concernant les intersections homoclines.

1.2 Créations de connexions dans certains cas particuliers.

Nous allons dans cette section nous intéresser à la création de connexions d'un type très particulier : soit la création d'orbites périodiques, soit la création de connexions à l'aide de morceaux de variétés stables ou instables. Signalons que nos résultats permettent de fermer l'orbite de points qui peuvent à priori être des points errants ; donc le résultat obtenu ici généralise en quelque sorte le closing lemma de C. Pugh (cf [16]).

Dans toute la suite de cette section, on supposera $f \in \mathrm{Diff}^k(M)$ où $k \geq 1$ et que tous les points périodiques de f sont hyperboliques. De plus, si $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $M(f)$ désignera l'ensemble des points $p \in M$ tels que la suite $(f^n p)_{n \geq 0}$ a au moins une valeur d'adhérence.
Definition : $(P_0, P_1, \ldots, P_N) \in (M(f))^{N+1}$ où $N \geq 1$ est une (α, ω)-chaîne finie si pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{N}$ et une suite d'entiers strictement positifs $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : $\lim_{n \to +\infty} x_n = P_{k-1}$ et $\lim_{n \to +\infty} f^{i_n}(x_n) = P_k$.

Remarque : On peut remarquer si $(P_0, \ldots P_N)$ est une (α, ω)-chaîne finie, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une ε-chaîne passant par $P_0, P_1, \ldots, P_N$. Par contre, il existe des exemples de difféomorphismes f pour lesquels deux points donnés p et q sont reliables par chaîne mais ne sont reliables par (α, ω)-chaîne : il suffit de considérer le difféomorphisme f de $\mathbf{T}^2$ défini par : $f(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2)$ où α est irrationnel ; f est alors transitif par chaînes, mais pas par (α, ω)-chaînes.

Definition : si $(P_0, \ldots, P_N)$ est une (α, ω)-chaîne, alors sa longueur est N.
On dit que $(P_0, \ldots, P_N)$ est une (α, ω)-chaîne minimale si sa longueur est minimale parmi les (α, ω)-chaînes de premier terme P_0 et de dernier terme P_N.

On note $O_+(P) = \{f^n(P), n \geq 1\}$ l'orbite strictement positive de P.

Proposition 3 *Soit $f \in \mathrm{Diff}^k(M)$ un difféomorphisme M dont tous les points périodiques sont hyperboliques. Soit U un voisinage de f en topologie C^1 et $(P_0, \ldots, P_N)$ une (α, ω)-chaîne minimale de f . Alors il existe $g \in U$ de classe C^k tel que $P_0, \ldots, P_N$ dans cet ordre strict sont sur une même orbite de g.*

Remarque : (1) Il serait faux de croire que dans le cas particulier où $\omega(P_{i-1}, f) \cap \alpha(P_i, f) \neq \emptyset$, l'orbite obtenue qui connecte P_0 à P_N “approche” un bout de l'orbite de P_0, suivi d'un bout de l'orbite de P_1, e.t.c.

(2) En fait, dans le cas particulier où $N = 2$ (on considère donc une succession de *deux* connexions), une lecture attentive de la démonstration permet de voir que l'on n'a pas besoin de supposer la (α, ω)-chaîne minimale pour obtenir le résultat (i.e. trouver une orbite passant successivement par P_0, P_1 et P_2) ; par contre, dès que $N \geq 3$ il faut supposer la (α, ω)-chaîne minimale pour pouvoir conclure.

Il est alors facile de déduire de cette proposition que :

Corollaire 4 *Il existe un G_δ-dense G de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que pour tout $f \in G$ et pour tous p, q dans M l'une au moins des deux conditions suivantes est satisfaisante :*

(i) il existe U voisinage de f, V_p et V_q voisinages de p et q respectivement tels que pour tout $g \in U$ dont tous les points périodiques sont hyperboliques on ait :
"il n'existe pas de (α, ω)-chaîne pour g joignant p à q".

(ii) pour tous voisinages V_p et V_q de p et q respectivement on a

$$\left(\bigcup_{n\geq 1} f^n(V_p)\right) \cap V_q \neq \emptyset$$

ce qui signifie, si $(p, q) \in M(f)^2$, qu'il existe une (α, ω)-chaîne de longueur 1 joignant p à q.

Definition : $p \in M$ est (α, ω)-récurrent si il existe une (α, ω)-chaîne d'extrémités p et p.

Remarque : Evidemment, un point récurrent est (α, ω)-récurrent, mais la réciproque n'a aucune raison d'être vraie. La figure qui suit montre en effet un point (α, ω)-récurrent qui n'a aucune raison d'être récurrent :

Figure 1

De même, un point non errant de $M(f)$ est (α, ω)-récurrent.

Corollaire 5 *Il existe un G_δ-dense de G de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que pour tout $f \in G$, l'ensemble des points périodiques de f est dense dans l'ensemble des points (α, ω)-récurrent.*

Remarque : Remarquons qu'une autre interprétation des résultats précédents serait de dire qu'une certains relation est transitive ; nous n'insistons pas sur ce point de vue tout de suite, car il sera développé en section suivante (dans le cas des variétés compactes).

Nous allons maintenant nous intéresser à un autre type de connexions : celles incluses dans des variétés stables ou instables de points périodiques hyperboliques.

Proposition 6 *Soit M une variété de classe C^∞, f un difféomorphisme de classe C^k ($k \geq 1$) de M. Soit p_1 un point périodique hyperbolique de f, p un point de $W^u(p_1, f)$ et $q \in M$ tel que $q \in F(p, f)$. Alors, pour tout voisinage U de f en topologie C^1, il existe $g \in U$ pour lequel p_1 est toujours un point périodique hyperbolique de classe C^k, on a $p \in W^u(p_1, g)$ et $q \in O_+(p, g)$.*

Si maintenant p et q sont respectivement sur des variétés stables et instables de points périodiques hyperboliques, on obtient :

Proposition 7 *Soit M une variété de classe C^∞, f un difféomorphisme de classe C^k ($k \geq 1$) de M et U un voisinage de f en topologie C^1. Soient p_1 et q_1 deux points périodiques hyperboliques de f, p un point de la variété instable de p_1 et q un point de la variété stable de q_1 tels que $q \in F(p, f)$. Alors il existe $g \in U$ pour lequel p_1 et q_1 sont encore des points périodiques hyperboliques ayant une orbite hétérocline de p_1 vers q_1 qui passe par p, puis par q.*

En fait, on obtient même un résultat meilleur :

Proposition 8 *Soit M une variété de classe C^∞, f un difféomorphisme de classe C^k ($k \geq 1$) de M et U un voisinage de f en topologie C^1. Soient p_1 et q_1 deux points périodiques hyperboliques de f, $p \in F(p_1, f) \cap B(q_1, f)$ un point de $M(f)$ qui est soit périodique hyperbolique, soit non périodique. Alors, il existe $g \in U$ pour lequel p_1 et q_1 sont encore des points périodiques hyperboliques et $p \in W^u(O(p_1, g), g) \cap W^s(O(q_1, g), g)$.*

1.3 Description fine des difféomorphismes génériques de classe C^1 des variétés compactes.

Désormais, on supposera que M est compacte et f sera un difféomorphisme de M de classe C^1.

Definition : Si $(x, y) \in M^2$, on écrira $x\mathcal{R}_f y$ (resp. $x\mathcal{R}'_f y$) si il existe une suite d'entiers positifs ou nuls (resp. strictement positifs) $(i_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de M telles que :

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} f^{i_n} x_n = y$.

Si $x \in M$, on notera alors : $K_f(x) = \{y \in M; x\mathcal{R}'_f y\}$.

REMARQUE : En fait, en utilisant une base dénombrable de voisinages de x et de y, on voit facilement que :

- on a $x\mathcal{R}_f y$ si et seulement si pour tout voisinage U de x, pour tout voisinage V de y, on a :

$$\left(\bigcup_{n\geq 0} f^n(U)\right) \cap V \neq \emptyset;$$

- on a $x\mathcal{R}'_f y$ si et seulement si pour tout voisinage U de x, pour tout voisinage V de y, on a :

$$\left(\bigcup_{n\geq 1} f^n(U)\right) \cap V \neq \emptyset;$$

- on peut aussi remarquer que : $x\mathcal{R}'_f y$ équivaut à $y \in F(x, f)$, qui lui-même équivaut à $x \in B(y, f)$. Donc $K_f(x) = F(x, f)$;
- Remarquons que $K_f(x)$ n'est jamais vide puisqu'il contient l'orbite strictement positive de x, et que $x \in K_f(x)$ (i.e. $x\mathcal{R}'_f x$) si et seulement si $x \in \Omega(f)$ (i.e. x n'est pas un point errant de f).

Nous allons étudier la relation $\mathcal{R}'_f$; les premiers résultats énoncés, assez simples, n'utiliseront pas les résultats perturbatifs précédents. Par contre, la suite des résultats, qui met en évidence pour chaque $f \in \mathcal{G}$ une famille canonique d'attracteurs au sens de Liapounov (cette notion sera définie après) faiblement transitifs, utilise pleinement ces résultats.

Proposition 9 *Pour tout $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, le graphe $\mathcal{G}_f$ de $\mathcal{R}'_f$ est fermé dans $M \times M$. En particulier, pour tout $x \in M$, $K_f(x)$ est fermée donc compacte*

REMARQUE : Ce résultat implique que l'application : $x \to K_f(x)$ est semi-continue supérieurement.

Proposition 10 *Il existe un G_δ dense G_0 de $\mathrm{Diff}^1(M)$ muni de la topologie C^1 tel que : pour tout $f \in G_0$, pour tout couple $(p, q) \in M^2$, l'une des deux propriétés suivante est vérifiée :*
• soit $p\mathcal{R}'_f q$;
• soit il existe U voisinage de f (en topologie C^1 donc), V_p voisinage de p et V_q voisinage de q tels que :

$$\forall g \in U, \bigcup_{k\geq 1} g^k(V_p) \cap V_q = \emptyset.$$

Remarque : En fait, le résultat précédent est valable en toute topologie, nous nous sommes contentés de le donner en topologie C^1 car nous ne pouvons démontrer les résultats qui vont suivre qu'en topologie C^1.
Une autre traduction de l'énoncé de la proposition 10 est : l'application G définie sur $\mathrm{Diff}^1(M)$ à valeurs dans l'ensemble des parties compactes de $M \times M$ par $G(f) = \mathcal{G}_f$ est semi-continue supérieurement en tout point de G_0. Comme de plus cette application G est toujours semi-continue inférieurement, l'application G est donc continue en tout point de G_0.

Avant de commencer à donner les propriétés qui découlent des résultats perturbatifs énoncés précédemment, donnons quelques exemples de $\mathcal{G}_f$ ou de $K_f(x)$:

Exemples : (1) Remarquons que si $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, alors $\mathcal{G}_f = M \times M$ si et seulement si f est transitif.
(2) On peut démontrer que si $K_f(x)$ est fini, alors x est périodique, $K_f(x)$ est l'orbite de x et cette orbite est stable au sens de Liapounov (cette notion sera bientôt précisément définie ; elle signifie qu'il existe une base $\mathcal{U}$ de voisinages de l'orbite de x stables par f, i.e. tels que : $\forall U \in \mathcal{U}, f(U) \subset U$). La réciproque est bien entendu vraie : si p est un point périodique stable au sens de Liapounov, $K_f(p)$ est fini, et c'est l'orbite de p.
(3) Soit α un irrationnel, et $f\ : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ où $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ définie par : $f(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2)$. Alors on a : $K_f((\theta_1, \theta_2)) = \mathbf{T}^1 \times \{\theta_2\}$. Mais attention, cet exemple n'est pas un élément de G_0 (en effet, on peut en perturbant légèrement f rendre f transitif, donc G (définie dans la remarque précédente) n'est pas semi-continue supérieurement en f) !

Remarque : Il semble naturel de définir la relation d'équivalence suivante pour les difféomorphismes de M : $f \sim g$ si il existe un homéomorphisme h de M tel que : $\mathcal{G}_{h \circ f \circ h^{-1}} = \mathcal{G}_g$. Il serait intéressant :

- d'essayer de décrire les classes d'équivalences de "$\sim$", ou éventuellement les classes d'équivalences de difféomorphismes suffisamment "généraux" ;
- plus modestement pour commencer de décrire les difféomorphismes "$\sim$-stables", i.e. les f qui sont dans l'intérieur de leur classe d'équivalence.

Remarquons que cette classification est strictement plus grossière que celle induite par l'équivalence topologique (rappelons que f et g sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme conjuguant l'un à l'autre) : en effet, on peut trouver par exemple dans [4] un exemple de difféomorphisme f_0 stablement transitif, mais non Anosov ; alors ce difféomorphisme n'est pas structurellement stable (i.e. pas dans l'intérieur de sa classe d'équivalence topologique), puisqu'on sait que l'ensemble non errant d'un difféomorphisme structurellement stable est hyperbolique (voir [11]). Alors f_0 est $\sim$-stable mais n'est pas structurellement stable.

Definition : Désormais, $\mathcal{G}$ désignera l'intersection du G_δ-dense donné par le corollaire 4 avec le G_δ-dense $\mathcal{H}$ des difféomorphismes dont tous les points périodiques sont hyperboliques.

Proposition 11 *Soit $f \in \mathcal{G}$; alors :*

(a) $\mathcal{R}_f$ est réflexive et transitive ; $\mathcal{R}'_f$ est transitive ;

(b) $\forall (x, y) \in M^2, f(y) \in K_f(x) \Rightarrow K_f(y) \subset K_f(x)$.

Definition : On pose alors : $\mathcal{K}_f = \{K_f(x); x \in M\}$.

Proposition 12 *Soit $f \in \mathcal{G}$. Toute partie totalement ordonnée non vide de $(\mathcal{K}_f, \supset)$ a une borne supérieure dans $\mathcal{K}_f$; en particulier, $(\mathcal{K}_f, \supset)$ est un ensemble inductif*

Bien entendu, on va alors appliquer le lemme de Zorn et étudier les éléments maximaux de $(\mathcal{K}_f, \supset)$.

Definition : Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, $E \subset M$ une partie fermée invariante sous f. On dit que E est (positivement) stable au sens de Liapunov quand pour tout voisinage V de E, il existe W voisinage de E tel que :

$$\bigcup_{n \geq 0} f^n(W) \subset V.$$

Remarque : Si E est stable au sens de Liapunov, si $x \in M \backslash E$, alors $\alpha(x, f) \cap E = \emptyset$: il n'existe pas d'orbite issue (en $-\infty$) de E autre que celles incluses dans E. Par contre, bien sûr, E peut être un attracteur au sens fort.

Theorème 13 *Soit $f \in \mathcal{G}$. Il existe une unique famille $\mathcal{M}_f$ de compacts de M non vides invariants par f et deux à deux disjoints tels que :*

(a) chaque élément de $\mathcal{M}_f$ est stable au sens de Liapunov ;

(b) si $K \in \mathcal{M}_f$, alors pour tout $(x, y) \in K^2$, on a : $x\mathcal{R}'_f y$;

(c) pour tout $x \in M$, il existe $K \in \mathcal{M}_f$ tel que $K \subset K_f(x)$.

Remarque : $\mathcal{M}_f$ est une famille d'attracteurs au sens faible, transitifs au sens faible. Remarquons d'ailleurs que si $K \in \mathcal{M}_f$, alors $f_{|K}$ est transitif par chaîne. Donnons quelques exemples d'éléments possibles de $\mathcal{M}_f$:

(a) si f est le difféomorphisme de $\mathbb{T}^2$ défini par : $f(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2)$ où α est un irrationnel, $\mathcal{M}_f$ est l'ensemble des cercles invariants sous f, i.e. l'ensemble des $\{(\theta, \beta); \theta \in \mathbb{S}^1\}$;

(b) si f est transitif, on a : $\mathcal{M}_f = \{M\}$;

(c) si f a un point périodique p hyperbolique attractif, alors l'orbite de p est un élément de $\mathcal{M}_f$; de plus, dans ce cas, il existe un voisinage de l'orbite de p qui ne rencontre aucun autre élément de $\mathcal{M}_f$;

(d) si f est un difféomorphisme structurellement stable, les élements de $\mathcal{M}_f$ sont les pièces basiques attractives (en effet, si $K \in \mathcal{M}_f$, alors $K \subset \Omega(f)$, donc K est une réunion de pièces basiques ; étant minimal, c'est une pièce basique, et comme K est stable au sens de Liapunov, on a nécessairement : $W^u(K) \subset K$, donc c'est une pièce basique attractive).

Proposition 14 *Soit $f \in \mathcal{G}$; alors :*

(a) il existe un G_δ dense G de M tel que :

$$\forall x \in G, \omega(x,f) \subset \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{M}_f} K};$$

(b) si de plus il existe $K \in \mathcal{M}_f$ tel que $\omega(x,f) \cap K \neq \emptyset$, alors on a : $\omega(x,f) \subset K$;

(c) si de plus les éléments de $\mathcal{M}_f$ sont isolés en ce sens que pour tout élément K de $\mathcal{M}_f$, il existe U voisinage de K qui ne rencontre aucun élément de $\mathcal{M}_f$ autre que K, en fait on peut choisir G de telle sorte que :

$$\forall x \in G, \omega(x,f) \subset \bigcup_{K \in \mathcal{M}_f} K.$$

Remarque : C. Bonatti et L. Diaz ont donné récemment des exemples d'ensembles E de difféomorphismes qui rencontrent tout G_δ dense et tels que tout élément de E a une infinité de puits ou de sources (cf [5]). Ceci montre qu'on ne saurait espérer obtenir pour tout élément f de $\mathcal{G}$ un nombre fini d'éléments dans $\mathcal{M}_f$.

Proposition 15 *Soit $f \in \mathcal{G}$; alors l'intérieur de l'ensemble non errant $\Omega(f)$ de f est inclus dans $\bigcup_{K \in \mathcal{M}_f} K$ qui est lui-même inclus dans $\Omega(f)$.*

Remarque :

1) la première inclusion peut être stricte : si p est un point périodique hyperbolique attractif, p est un point isolé de $\Omega(f)$, donc n'est pas dans l'intérieur de $\Omega(f)$, mais pourtant $p \in \bigcup_{K \in \mathcal{M}_f} K$;

2) de même, la seconde inclusion peut aussi être stricte : si p est un point périodique hyperbolique répulsif, on a : $p \notin \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{M}_f} K}$ et pourtant $p \in \Omega(f)$.

3) Dans le cas où f préserve une forme volume finie, on a alors égalité de toutes ces quantités, puisque $\Omega(f) = M$.

1.4 Le cas des classes homoclines.

Nous continuons à nous placer dans le cas où M est compacte et $f \in \mathcal{G}$ où $\mathcal{G}$ est le G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1(M)$ qui a été défini en sous-section 1.3. Nous allons ici nous intéresser aux variétés stables et instables des points périodiques de f. Puis nous étudierons ce qui se passe pour les éléments de $\mathcal{M}_f$ qui contiennent un point périodique, montrant qu'en particulier ils sont transitifs au sens fort pour f assez général.
Rappelons que si p est un point périodique hyperbolique de f, $W^u(p, f)$ sera sa variété instable, $W^u_{\mathrm{loc}}(p, f)$ sera sa variété locale instable ; de plus, si $x \in M$, $O_+(x, f)$ désignera son orbite strictement positive sous f. On définit de façon analogue $W^s(p, f)$, $W^s_{\mathrm{loc}}(p, f)$ et $O_-(p, f)$. De plus, si $E \subset M$, alors $O(E) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} f^n(E)$ est l'orbite de E sous f.

Proposition 16 *Soit M une variété compacte de classe C^∞. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}_1$ de* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *(muni de la topologie C^1) tel que :*
pour tout $f \in \mathcal{G}_1$, pour tout $p \in M$ périodique pour f, p est hyperbolique et :

- $K_f(p) = \overline{W^u(O(p), f)}$ *;*
- *il existe un G_δ dense G de $W^u_{\mathrm{loc}}(O(p), f)$ tel que pour tout $p' \in G$, on a : $K_f(p') = \overline{O_+(p', f)}$.*

Ainsi, tout point relié à un point périodique hyperbolique est forcément dans l'adhérence de la variété instable de son orbite.

Proposition 17 *Soit M une variété compacte de classe C^∞. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}_2$ de* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *(muni de la topologie C^1) tel que :*
pour tout $f \in \mathcal{G}_2$, pour tout $p_1, p_2 \in M$ périodiques pour f, p_1 et p_2 sont hyperboliques et si $\dim W^u(p_1, f) \geq \dim W^u(p_2, f)$ *:*

pour tout $(q_1, q_2) \in (W^u_{\mathrm{loc}}(p_1, f) \backslash \{p_1\}) \times (W^s_{\mathrm{loc}}(p_2, f) \backslash \{p_2\})$ tel que $q_1 \mathcal{R}_f q_2$, pour tous voisinages V_1 et V_2 de q_1 et q_2, il existe une orbite hétérocline joignant $V_1 \cap W^u_{\mathrm{loc}}(p_1, f)$ à $V_2 \cap W^s_{\mathrm{loc}}(p_2, f)$.

Avec le langage développé par S. Hayashi dans [8], ceci exprime que l'ensemble des couple de points connectés par une connexion hétérocline entre p_1 et p_2 est dense dans l'ensemble des couples de points presque hétéroclines.

Proposition 18 *Soit M une variété compacte de classe C^∞. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}_3$ de* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *(muni de la topologie C^1) tel que :*
pour tout $f \in \mathcal{G}_3$, pour tout $p_1, p_2 \in M$ périodiques pour f, p_1 et p_2 sont hyperboliques et si $\dim W^u(p_1, f) \geq \dim W^u(p_2, f)$*, alors $W^u(O(p_1, f), f) \cap W^s(O(p_2, f), f)$ est dense dans :*

$$\overline{W^u(O(p_1, f), f)} \cap \overline{W^s(O(p_2, f), f)}.$$

Ceci répond dans le cas des difféomorphismes génériques (en topologie C^1) à un problème soulevé par S. Hayashi dans [7].

Outre le fait que les résultats précédents vont nous permettre de décrire quels sont les éléments de $\mathcal{M}_f$ (on reprend les notations de la sous-section 1.3), ils permettent de parler d'ensembles transitifs maximal et de répondre à une question soulevée par C. Bonatti, L. Diaz et E. Pujals dans [6] :

Corollaire 19 *Soit M une variété compacte de classe C^∞. Il existe un G_δ dense $\mathcal{G}_4$ de* $\mathrm{Diff}^1(M)$ *(muni de la topologie C^1) tel que :*
pour tout $f \in \mathcal{G}_4$, pour tout point p périodique de f, p est hyperbolique, le compact invariant $\overline{W^u(O(p, f), f) \cap W^s(O(p, f), f)}$ est transitif et tout compact invariant transitif contenant p est inclus dans

$$\overline{W^u(O(p, f), f) \cap W^s(O(p, f), f)}.$$

Remarque : En fait, on verra (dans les démonstrations) que toutes les intersections hétéroclines présentées par des éléments de $\mathcal{G}_4$ sont transverses. Ceci implique de façon classique (à l'aide du λ-lemma) que dans le cadre du corollaire 19, le compact invariant transitif maximal décrit est aussi :

$$\overline{W^u(O(p, f), f) \cap W^s(O(p, f), f)} = O(\overline{W^u(p, f) \cap W^s(p, f)}).$$

Désormais, $\mathcal{G}'$ désignera le G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1(M)$ qui est $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_3 \cap \mathcal{G}_4$. Intéressons nous alors plus spécifiquement aux points périodiques de $f \in \mathcal{G}'$ qui sont compris dans un élément de $\mathcal{M}_f$.

Proposition 20 *Soit M une variété compacte de classe C^∞ et $f \in \mathcal{G}'$. Alors, pour tout point $p \in M$ périodique pour f, p est hyperbolique et si de plus $K_f(p) \in \mathcal{M}_f$:*

- *$K_f(p) = \overline{W^u(O(p,f),f) \cap W^s(O(p,f),f)}$ est transitif (en particulier si p n'est pas attractif il existe des intersections homoclines) ;*
- *si $q \in K_f(p)$ est un autre point périodique de f tel que $\dim W^u(p,f) \geq \dim W^u(q,f)$, alors $K_f(p) = \overline{W^u(O(p,f),f) \cap W^s(O(q,f),f)}$ (en particulier il existe toujours des connexions hétéroclines entre deux orbites périodiques différentes d'un même élément de $\mathcal{M}_f$) ;*
- *si $q \in M$ est périodique, tel que $\dim W^u(p,f) \leq \dim W^u(q,f)$ et vérifie : $K_f(p) \subset K_f(q)$, alors $W^u(O(q,f),f) \cap W^s(O(p,f),f) \neq \emptyset$.*

1.5 Cas des difféomorphismes préservant le volume.

Il est à noter que les résultats perturbatifs de la sous-section 1.1 restent valables dans la classe des difféomorphismes symplectiques ou préservant une forme volume à condition de supposer que les points périodiques qui pourraient intervenir sont tous hyperboliques (le lemme perturbatif local utilisé est toujours valable dans ce cas, voir par exemple [2]). Mais dans la classe des difféomorphismes symplectiques, on ne peut pas dire que génériquement les points périodiques sont hyperboliques. C'est pourquoi nous ne pouvons étendre les résultats des deux sous-sections précédentes à cette catégorie.
Désormais, M sera une variété connexe de classe C^∞ de dimension supérieure ou égale à 3, munie d'une forme volume V et de volume fini, et $\mathrm{Diff}^1_V(M)$ désignera l'ensemble des difféomorphismes de classe C^1 de M qui préservent V. Tous les résultats des sections précédentes s'étendent dans cette catégorie, et on peut même préciser certains résultats (qui sont des conséquences immédiates de ce qui précède) :

Proposition 21 *Soit $f \in \mathcal{G}$:*

- *les éléments de $\mathcal{M}_f$ forment une partition de M ;*
- *tout élément de $\mathcal{M}_f$ admet une base de voisinages invariants.*

Remarque : Pour f dans un G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1_V(M)$, le closing lemma implique que l'ensemble des points périodiques est dense dans M, donc il existe des éléments de $\mathcal{M}_f$ qui sont de la forme décrite en proposition 20. Deux cas peuvent alors se produire pour un tel f qui de plus est dans $\mathcal{H}$:

- soit f est transitif ;
- soit $\mathcal{M}_f$ contient au moins deux classes ; on en déduit, comme M est connexe et complète, que $\mathcal{M}_f$ a la puissance du continu et donc que certains des éléments de $\mathcal{M}_f$ ne contiennent pas de point périodique, donc ne sont pas de la forme décrite en proposition 20.

1.6 Guide concernant la démonstration du théorème 1.

Avant que le lecteur n'attaque la lecture de cet article, nous tenons à l'avertir que la structure de la démonstration du théorème dont tout découle, le théorème 1, est assez complexe. C'est pourquoi nous mettons en évidence dans ce guide un chemin minimal permettant de comprendre sa démonstration. Pour en comprendre la démonstration, il faut successivement :

- lire le résultat algébrique dû à C. Pugh rappelé en section 3 ;
- en déduire le résultat perturbatif énoncé en section 2 et démontré en section 4 ;
- enfin utiliser ce résultat perturbatif pour démontrer le théorème 1 en section 5.

2 Un résultat perturbatif.

M sera une variété de classe C^∞ munie d'une métrique riemannienne de d. On peut alors, à l'aide de l'application exp, identifier un voisinage de chaque point $x \in M$ avec un voisinage de O dans l'espace vectoriel T_xM, ce qui permet alors (à l'aide de cette identification) de parler de "boites" :

De plus, on appellera "forme de boite" la donnée de :

- $e_1, \quad, e_m$ base normée de T_pM qui engendre les directions de côtés ;
- $\lambda_2, \quad, \lambda_m$ réels strictement positifs tels que si $\ell_1, \quad, \ell_m$ sont les longueurs des côtés de directions respectives $E_1, \quad E_m$:

$$\forall i \in \{2, \dots, m\}, \lambda_i = \frac{\ell_i}{\ell_1}.$$

(ainsi, deux boites de même forme se déduisent l'une de l'autre par une "homothétie" ou une "translation").

Theorème 22 *Soit $f \in \mathrm{Diff}^k(M)$ $(k \geq 1)$, U un voisinage en topologie C^1 de f, $p_0 \in M(f)$ un point non périodique de f et $\varepsilon \in]0,1[$.*

Alors il existe un voisinage V de p_0, un entier $N \geq 1$ et une forme de boite rectangulaire $(e_1, \quad, e_m, \lambda_2, \quad, \lambda_m)$ tels que :
pour toute boite B en p_0 incluse dans V de forme $(e_1, \quad, e_m, \lambda_2, \quad \lambda_m)$, pour tous points p, q de εB, il existe $g \in U$ de classe C^k qui coïncide avec f hors de $\bigcup_{0 \leq n \leq N-1} f^n(B)$ et qui vérifie : $g^N(p) = f^N(q)$.

Cet énoncé permet de connecter p à un itéré positif de q sous f. Il est contenu en substance dans [16] puisqu'il permet de démontrer le "closing lemma".

En fait, nous aurons besoin d'un résultat un peu plus précis que cet énoncé, que nous n'avons pas donné précedemment par souci de clarté :

ADDENDUM : *Soit $\eta \in]0,1[$ fixé. On peut de plus imposer que pour chaque $n \in \{1, \quad, N\}$, g^{-1} ne diffère de f^{-1} sur $f^n(B)$ que sur une boule centrée sur $f^n(\frac{\varepsilon+1}{2}B)$ de rayon inférieur à $\eta \cdot d(\partial f^n(\frac{\varepsilon+1}{2}B), \partial f^n(B))$.*

Ainsi, dans chaque $f^n(B)$, on peut imposer que le support de $f^{-1}g$ soit très "petit".

Remarque : en lisant la démonstration, le lecteur constatera qu'on peut aussi imposer, si $p_1 \in \omega(p_0)$, que le support de $f^{-1}g$ soit dans un voisinage aussi petit qu'on le veut de p_1.

3 Un résultat algébrique dû à C. Pugh.

Pour démontrer le résultat perturbatif, nous allons devoir faire appel à un résultat algébrique complexe démontré par C. Pugh dans [14] et complété dans [16]. Ce résultat a servi à C. Pugh et C. Robinson dans [16] à montrer le "closing lemma"(J. Mai avait donné dans [9] un résultat algébrique plus simple pour démontrer le "closing lemma", résultat que j'ai utilisé dans [2] mais je n'ai pu utilisé ce dernier résultat pour la création de connexions ; c'est pourquoi nous sommes obligés d'utiliser le résultat originel de C. Pugh).

Commençons par rappeler les notations et définitions, puis nous donnerons les énoncés qui nous seront utiles.

Definition : G et H seront deux espaces euclidiens, $M(G,H)$ désignera l'ensemble des monomorphismes de G dans H.

(1) Si $T \in M(G,H)$
- $m(T) = \min\{\|Tx\|; x \in G, \|x\| = 1\}$:
- $\|T\| = \max\{\|Tx\|; x \in G, \|x\| = 1\}$:
- bol $(T) = \frac{\|T\|}{m(T)}$ est la bolicité de T.

(2) si $T \in M(G,H)$ et $\bigoplus_{\perp} G_j = G$, la transformation perpendiculaire de T est $\widehat{T} = G \to H$ définie par $\widehat{T} = \sum A_j$ où $A_j : G_j \to [T(\bigoplus_{i \neq j} G_i)]^{\perp}$ est définie par la commutativité du

diagramme :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "T"] & H \arrow[d, "\Pi_j"] \\ G_j \arrow[u] \arrow[r, "A_j"] & \left[T\left(\bigoplus_{i \neq j} G_i\right)\right]^{\perp} \end{tikzcd}$$

où Π_j désigne la projection orthogonale. Les applications A_j sont appelées les altitudes de T relativement à G_j

(3) soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $M(G,H)$. Alors $\displaystyle\bigoplus_{\perp, j=1}^{L} G_j$ est une décomposition complète de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si les altitudes A_n^j de T_n relativement à $\bigoplus G_j$ vérifient :

(a) pour tout $j \in \{1, \ldots, L\}$, la suite $(bol(A_n^j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;

(b) pour tout $j \in \{1, \ldots, L-1\}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m(A_n^{j+1})}{\|A_n^j\|} = +\infty$$

Commentons un peu ces définitions :

(1) la bolicité décrit la distorsion de la boule unité à laquelle on applique T :

Figure 2

2) si par exemple G est le plan et V une droite , Ox, l'altitude relativement à V a pour norme la distance des droites engendrées par les images des côtés du carré standard unité perpendiculaires à V :

Figure 3

(3) si $\bigoplus_{\perp, j=1}^{L} G_j$ est une décomposition complète de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut décomposer les transformations orthogonales $\widehat{T}_n$ suivant les G_j de telle sorte que :

- en un certain sens chaque $(\widehat{T}_{n|G_j})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément “quasi-conforme” ;
- au contraire, si $i < j$: $(\frac{m(A_n^j)}{\|A_n^i\|})_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.

Le théorème démontré par C. Pugh est alors :

Theorème 23 *(C. Pugh) : Soit* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $M(G, H)$*. Il existe une sous-suite* $(T_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui admet une décomposition complète orthogonale.*

Nous n'allons pas redémontrer ce théorème, complètement démontré dans [14] et [16]. Mais comme la démonstration en est difficile et complexe, nous allons en rappeler les étapes essentielles :

- à l'aide de la décomposition polaire des matrices (si $M \in GL(n, \mathbb{R})$, il existe O orthogonales et S symétrique définie positive telle que $M = OS$), on peut trouver une suite de base orthogonales $(e_n^1, \quad e_n^g)_{n\in\mathbb{N}}$ de G et une suite de g-uplets de scalaires strictement positifs $(\lambda_n^1, \quad, \lambda_n^g)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour chaque n, le g-uplet : $(\frac{1}{\lambda_n^1} T_n(e_n^1), \ldots, \frac{1}{\lambda_n^g} T_n(e_n^g))$ soit une base orthonormée de H.
- on peut alors extraire de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(T_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe une suite de décomposition de G, notée $(G_n^1 \bigoplus_\perp G_n^2 \bigoplus_\perp \ldots \bigoplus_\perp G_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que chaque G_n^i soit somme de droites engendrées par des $e_{k_n}^j$ et telle que :

- si $(e_{k_n}^j, e_{k_n}^k) \in (G_n^i)^2$, alors la suite $(\frac{\lambda_{k_n}^j}{\lambda_{k_n}^k})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ni nulle, ni infinie ;

- si $e^j_{k_n} \in G^i_n$ et $e^k_{k_n} \notin G^i_n$ alors la suite $(\frac{\lambda^j_{k_n}}{\lambda^k_{k_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle ou infinie.

  (en d'autres termes on scinde G de telle sorte que sur chaque sous-espace du scindement, on dilate de façon comparable).

- La grassmannienne étant compacte, on peut quitte à réextraire une sous suite supposer que $\lim_{n\to\infty}(G^1_n \bigoplus_{\perp} \dots \bigoplus_{\perp} G^k_n) = G^1 \bigoplus_{\perp} \dots \bigoplus_{\perp} G^k_n$. Quitte à réordonner les G^i_n, on peut aussi supposer : si $i < j$, si $e^k_{k_n} \in G^i_n$ et $e^m_{k_n} \in G^j_n$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^k_{k_n}}{\lambda^m_{k_n}} = 0$.

Un calcul permet alors de montrer que si A_n est l'altitude de T_{k_n} relativement à G^1 :

- la suite $(\mathrm{bol}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
- on a : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\|A_n\|}{m(A^\perp_n)} = 0$ où $A^\perp_n$ est l'altitude de T_{k_n} relativement à $(G^1)^\perp$.

- On choisit alors G^1 comme premier sous-espace de la décomposition complète cherchée. C. Pugh a donné dans [14] un exemple montrant que par contre $G^2, \dots, G^k$ ne conviennent pas forcément comme décomposition complète. L'idée est alors d'utiliser le théorème sur un espace de dimension strictement plus petite que G (récurrence), à savoir $(G^1)^\perp$, et on y arrive avec beaucoup de technique...

Dans [16], C. Pugh et C. Robinson déduisent du théorème précédent un addendum important, que nous allons donner après définition :
Definition : Soit $V \subset G, A$ l'altitude de T relativement à V et $A^\perp$ l'altitude de T relativement à $V^\perp$. Alors l'hyperbolicité de T relativement à V est :

$$\mathrm{hyp}_V(T) = \frac{m(A^\perp)}{\|A\|}.$$

ADDENDUM (C. Pugh et C. Robinson) : *Soient $h > 0, M > 0$ et $\bigoplus_{i=1,\perp}^{L} G_i$ une décomposition complète orthogonale de $(T_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Alors il existe $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_L > 0$ et des intervalles $I^1 > I^2 > \dots > I^L$ d'entiers, chacun de longueur M, tels que : pour tout $i \in \{1, \dots L\}$, pour tout $n \in I^i$, on a :*

$$\mathrm{hyp}_{G_i}(T_{k_n} \circ \Delta) > h$$

où $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta^1 & \circ & \circ \\ \circ & \ddots & \circ \\ \circ & \circ & \Delta^L \end{pmatrix}$ *relativement à* $G_1 \bigoplus_{\perp} \dots \bigoplus_{\perp} G_L$

avec $\Delta^i = \lambda_i \mathrm{Id}_{G_i}$.

Ce résultat est démontré dans [16]. Expliquons ce qu'il signifie dans le cas particulier où la somme des $T_{k_n}(G_i)$ pour $1 \leq i \leq L$ est orthogonale pour tout n ; il existe alors un parallélépipède rectangle $\mathcal{P}$ dont chaque côté est inclus dans un G_i, tel que si C est une arète incluse dans G_i alors la longueur de C soit λ_i. Ce que nous dit alors l'addendum est que si $i \in \{1, \dots, L\}$, si $n \in I^i$, le parallélépipède rectangle $T_{k_n}(\mathcal{P})$ a ses côtés parallèles à $T_{k_n}(G_i)$ "petits" devant ses autres côtés,i.e ; ce parallélépidède est un quelque sorte "étroit"dans la direction $T_{k_n}(G)$. Ceci sera fondamental pour la démonstration du résultat perturbatif.

Donnons enfin un dernier résultat algébrique, qui est démontré aussi dans [16] (c'est la proposition 3.1 p 269) :

Proposition 24 *Soit A l'altitude de T relativement à V. On a :*

$$\|T^{-1}A - \mathrm{Id}_V\| \leq \frac{1}{hyp_V(T)}.$$

4 Démonstration du résultat perturbatif.

Nous allons utiliser un résultat perturbatif bien connu, dont le lecteur peut par exemple trouver une démonstration dans [2]. Si $x \in M, B_x(\delta)$ désignera la boule fermée de T_xM de rayon δ (pour la métrique riemannienne) et si $N \in B_x, x + v$ désignera $\exp_x v$.

Lemme 25 *(dit "lemme perturbatif") : soit U un voisinage de l'identité Id en topologie C^1 et K un compact de M. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que quel que soit $p \in K$ et $v \in B_p(\delta)$, il existe $g \in U$ de classe C^∞ telle que :*

(i) Supp $g \subset B_{\|v\|}(p)$;

(ii) $g(p) = p + \varepsilon v$.

Ce lemme perturbatif permet de bouger à l'aide d'une perturbation g de l'identité un point $p \in K$ d'un vecteur w de norme proportionnelle à la taille du support de g.

Commençons maintenant la démonstration du théorème (résultat perturbatif). On considère donc f, U, p_0 et ε comme dans l'énoncé de ce théorème.

1er pas : on se ramène à considérer une suite d'applications linéaires

Comme $p_0 \in M(f)$, il existe $p_1 \in \omega(p_0, f)$. On peut alors trouver un voisinage compact K de p_1 qu'on peut identifier à une partie de $\mathbb{R}^m$ (plus précisément, on identifie K à une partie de $T_{p_1}M = H = \mathbb{R}^m$ grâce à exp) ; il existe alors une suite $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante d'entiers strictement positifs tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{j_n}p_0 \in K$. On s'intéresse alors à la suite des applications linéaires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $T_n = Tf^{j_n}(p_0) : T_{p_0}M \to T_{f^{j_n}(p_0)}M$. Comme $f^{j_n}(p_0) \in K$ et qu'on a identifié K à une partie de $\mathbb{R}^m$, on peut considérer que les applications T_n sont des applications linéaires (et même des isomorphismes) de $G = T_{p_0}M$ dans $H = \mathbb{R}^m$.

2er pas : on applique le lemme perturbatif

Soit $V = \{x+v; x \in K, v \in B_x(1)\}$. Il existe un voisinage U' de l'identité en topologie C^1 tel que pour tous $f_1, \ldots, f_k$ dans U' à supports disjoints et inclus dans V : $f_k \circ \ldots \circ f_1 \circ f \in U$.

On peut alors appliquer le lemme perturbatif rappelé précédemment au voisinage U' de l'identité et au compact K ; il nous fournit l'existence d'une constante $\eta \in]0,1[$ (la notation ε est déjà utilisée dans l'énoncé du théorème perturbatif).

3er pas : construction d'une forme de boite

On applique le théorème algébrique de C. Pugh à la suite de monomorphismes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vont de G dans H. On en déduit qu'il existe une sous-suite $(T_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui admet une décomposition complète orthogonale, notée $\bigoplus_{\perp, i=1}^{L} G_i$. L'addendum qui suivait ce théorème peut alors s'appliquer pour :

- $M = mN$ où $N = [\frac{16bc}{\eta(1-\varepsilon)}] + 1$ où b est un majorant de $\{\mathrm{bol}_{G_i}(T_{k_n}); n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq L\}$. Ce majorant existe puisque la décomposition est complète ;
- h suffisamment grand, d'une façon que nous expliquerons à la deuxième étape et qui ne dépend que de ε et N.

Cette proposition donne alors l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_m)$ de G de constante $\lambda_1 > 0, \ldots \lambda_L > 0$ et d'intervalles $I^1 > I^2 > \ldots I^L$ d'entiers qui vérifient les conclusions de cette propriété. Quitte à diminuer ces intervalles, on peut supposer que I^L est de longueur $\dim G_i \cdot N$.

4ème pas : construction d'une suite des points

Avant de donner un énoncé, introduisons une notation : si P est un parallélépipède de G et $\varepsilon \in]0,1[, \varepsilon P$ désignera la parallèlèpipède homothétique à P par l'homothétie de centre le centre de P et de rapport ε.

Proposition 26 *pour tout parallélépipède rectangle B de G de forme $(e_1, \ldots, e_m, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, pour tous points p, q de εB, il existe une suite de points $(x_0, \ldots, x_{mN})$ à valeurs dans $\frac{1+\varepsilon}{2}B$ telle que $x_0 = p, x_{mN} = q$ et :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, mN\}, d(T_{k_i}x_{i-1}, T_{k_i}x_i) \leq \frac{\eta}{4} d(\partial T_{k_i}(\frac{1+\varepsilon}{2}B), \partial T_{k_i}B)$$

Admettons provisoirement cette proposition et expliquons comment elle permet de conclure :

5ème pas : démonstration du théorème perturbatif

Comme f est de classe C^1, il existe un voisinage V de p_0 tel que pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$ et pour tout $(x,y) \in (f^{j_{k_n}}(V))^2$, on ait :

$$\frac{1}{2}d(x,y) \leq d(T_{k_n} \circ f^{-j_{k_n}}(x), T_{k_n} \circ f^{-j_{k_n}}(y)) \leq 2d(x,y). \quad (1)$$

Appliquons alors la proposition précédente. Soient p, q deux points de εB où B a la forme décrite dans la proposition et est incluse dans V. Alors par la proposition, il existe une suite de points $x_0, \ldots, x_{Nm}$ à valeurs dans $\frac{1+\varepsilon}{2}B$ telle que $x_0 = p, x_{Nm} = q$ et :

$$\forall i \in \{1, \ldots, mN\}, d(T_{k_i}x_{i-1}, T_{k_i}x_i) \leq \frac{\eta}{4}d(\partial T_{k_i}(\varepsilon B), \partial T_{k_i}(\frac{1+\varepsilon}{2}B))$$

Or, (1) implique que :

$$\forall n \in \{1, \ldots, mN\}, d(f^{j_{k_n}}x_{n-1}, f^{j_{k_n}}x_n) \leq 2d(T_{k_n}x_{n-1}, T_{k_n}x_n)$$

et que :

$$\forall n \in \{1, \ldots, mN\}, d(\partial f^{j_{k_n}}(\frac{1+\varepsilon}{2}B), \partial f^{j_{k_n}}(B)) \geq$$
$$\frac{1}{2}d(\partial T_{k_n}(\frac{1+\varepsilon}{2}B), \partial T_{k_n}(B))$$

On a finalement

$$\forall i \in \{1, \ldots, mN\}, d(f^{j_{k_i}}x_{i-1}, f^{j_{k_i}}x_i) \leq \eta d(\partial f^{j_k}(\frac{1+\varepsilon}{2}B), \partial f^{j_{k_i}}(B)). \quad (2)$$

De plus, si on a choisi V assez petit, comme p_0 n'est pas périodique, on peut supposer que les parties $(f^n V)_{0 \leq n \leq j_{k_{mN}}}$ sont deux a deux disjointes.

Construisons alors grâce au lemme de perturbation (voir le second pas) pour chaque $i \in \{1, \ldots, mN\}$ une application $g_i \in U'$ de classe C^k à support dans $f^{j_{k_i}}B$ et telle que : $g_i(f^{j_{k_i}}x_{i-1}) = f^{j_{k_i}}(x_i)$. Ceci est possible à cause de (2). De plus, vu le choix de V, les g_i sont à support deux à deux disjoints. Donc $g = g_{Nm} \circ \ldots \circ g_1 \circ f \in U, g$ ne diffère de f que sur :

$$\bigcup_{0 \leq n \leq j_{k_{Nm}}} f^n(B)$$

et on peut calculer l'orbite de p sous g :

- $g^{\circ}(p) = p, g^1(p) = f(p), \cdots, g^{j_{k_1}-1}(p) = f^{j_{k_1}-1}(p);$
- $g^{j_{k_1}}(p) = g_1(f^{j_{k_1}}(x_0)) = f^{j_{k_1}}(x_1), \cdots, g^{j_{k_2-1}}(p) = f^{j_{k_2-1}}(x_1);$
- $g^{j_{k_2}}(p) = g_2 \circ f^{j_{k_2}}(x_1) = f^{j_{k_2}}(x_2);$
- $g^{j_{k_{Nm}}}(p) = g_{Nm} \circ f^{j_{k_{Nm}}}(x_{N-1}) = f^{j_{k_{Nm}}}(x_N) = f^{j_{k_{Nm}}}(q);$

soit la conclusion du théorème perturbatif. ∎

6ème pas : démonstration de l'addendum

La démonstration précédente (5ème pas) peut se faire avec n'importe quel η, par exemple un η (noté η_0) plus petit que celui donné par le lemme de perturbation :

$$d(f^{j_{k_i}}x_{i-1}, f^{j_{k_i}}x_i) \leq \eta_0 d(\partial f^{j_{k_i}}(\frac{\varepsilon + B}{2}), \partial f^{j_{k_i}}(B))$$

et dans ce cas, le rayon des supports des g_i est majoré par :

$$\frac{\eta_0}{\eta} d(\partial f^{j_{k_i}}(\frac{\varepsilon+1}{2}B), \partial f^{j_{k_i}}(B))$$

où $\frac{\eta_0}{\eta}$ peut tre choisi aussi petit qu'on le souhaite.

7ème pas : démonstration de la proposition du 4ème pas

Il suffit de démontrer la proposition pour B centrée en O (sinon, il suffit de translater) ; c'est pourquoi nous supposerons désormais que B est centrée en O.

Il s'agit là d'un résultat d'algèbre linéaire, puisque seule la suite d'applications linéaires $(T_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ intervient, et non pas les $f^{j_{k_n}}$.

On considère $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ comme dans l'énoncé (avec $\lambda_1 = 1$).

1ère étape : place entre deux boites :

Vu la construction opérée au pas 3, on sait que si Δ est défini par : $\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \Delta e_i = \lambda_i e_i$, on a :

$$\forall i \in \{1, \ldots, L], \forall n \in I^i, hyp_{G_i}(T_{k_n} \circ \Delta) > h.$$

Aussi, si $A_i^\perp(P)$ (resp. $A_i(P)$) désigne l'altitude de P relativement à G_i (resp. $G_i^\perp$), on a par définition de l'hyperbolicité :

$$\forall i \in \{1, \ldots, L\}, \forall n \in I^i, m(A_i^\perp(T_{k_n} \circ \Delta)) \geq h\|A_i(T_{k_n} \circ \Delta)\|.$$

Soit alors C le cube :

$$C = \{\sum_{i=1}^m x_i e_i; x_i \in [-1, 1]\}.$$

On voit facilement que :

$$d(\partial(T_{k_n} \circ \Delta(C)), \partial(T_{k_n} \circ \Delta(\frac{1+\varepsilon}{2}C))) \geq \frac{1-\varepsilon}{2} \inf\{m(A_i(T_{k_n} \circ \Delta)), m(A_i^\perp(T_{k_n} \circ \Delta))\}$$

Comme $h \geq 1$, on a :

$$\forall i \in \{1, \ldots, L\}, \forall n \in I^i, m(A_i^\perp(T_{k_n} \circ \Delta)) \geq m(A_i(T_{k_n} \circ \Delta))$$

donc pour tout $i \in \{1, \ldots, L\}$ et tout $n \in I^i$:

$$d(\partial(T_{k_n} \circ \Delta(C)), \partial(T_{k_n} \circ \Delta(\frac{1+\varepsilon}{2}C))) \geq m(A_i(T_{k_n} \circ \Delta)).\frac{1-\varepsilon}{2}$$

soit avec les notations de l'énoncé de la proposition : si $B = \lambda \Delta C$ où $\lambda > 0$:

$$d(\partial T_{k_n}(B), \partial T_{k_n}(\frac{1+\varepsilon}{2}B)) \geq \lambda m(A_i(T_{k_n} \circ \Delta)).\frac{1-\varepsilon}{2}$$

2ème étape : choix de h :
Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ on notera n_j l'unique entier de $\{1, \ldots, L\}$ tel que : $e_j \in G_{n_j}$.

Convenons de plus de numéroter en croissant :

$$\{m_n; 1 \leq n \leq mN\} = \{k_n; n \in I^1 \cup \cdots \cup I^2\}.$$

On définit alors une application linéaire de $(\mathbb{R}^m)^N$ dans H par, si $y = (y_1^i, \ldots y_m^i)_{1 \leq i \leq N} \in (\mathbb{R}^m)^N$:

$$\phi(y) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq N} (T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta)^{-1} A_{n_i} (T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta)(y_i^j e_i).$$

On sait que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, N\}$

$$hyp_{G_{n_i}}(T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta) > h.$$

On en déduit grâce à la dernière proposition algébrique donnée après le résultat algébrique :

$$\|(T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta)^{-1} A_{n_i} (T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta) - Id_{G_{n_i}}\| \leq \frac{1}{h};$$

puis que pour tout $y = (y_1^i, \ldots, y_m^i)_{1 \leq i \leq N}$ de $(\mathbb{R}^m)^N$:

$$\|\phi(y) - \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq m} (\sum_{1 \leq j \leq N} y_i^j) e_i\| \leq \frac{1}{Nh} \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{1 \leq j \leq N} \|y_i^j\|.$$

Si h a été choisi suffisamment grand, l'application linéaire ϕ est donc proche (au sens des applications linéaires) de l'application ψ définie par :

$$\psi(y) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{1 \leq j \leq N} y_i^j \right) e_i$$

Or, il se trouve que ψ vérifie :

$$\psi([-1,1]^{mN}) = C$$

donc si h a été choisi assez grand, on a :

$$\varepsilon C \subset \phi([-\frac{1+2\varepsilon}{3}, \frac{1+2\varepsilon}{3}]^{mN}) \subset \frac{1+\varepsilon}{2} C$$

3ème étape : construction de la suite :
Soient maintenant p, q deux points de εB. Il existe alors deux points r et s de εC tels que : $p = \lambda \Delta r$ et $q = \lambda \Delta s$. Il existe alors

$$r' = (r_i^1, \ldots, r_i^N)_{1 \leq i \leq m} \quad \text{et} \quad s' = (s_i^1, \ldots, s_i^N)_{1 \leq i \leq m}.$$

dans $[-\frac{1+2\varepsilon}{3}, \frac{1+2\varepsilon}{3}]^{mN}$ tels que $r = \phi(r')$ et $s = \phi(s')$.

On définit alors $mN + 1$ points de $[-\frac{1+2\varepsilon}{3}, \frac{1+2\varepsilon}{3}]^{mN}$ comme suit (on convient de noter $r_i = (r_i^1, \ldots, r_i^N)$ et $s_i = (s_i^1, \ldots, s_i^N)$) :

- $y_0 = r'$;
- $y_1 = (s_1^1, r_1^2, \ldots, r_1^N, r_2, \ldots, r_m)$;
- $y_2 = (s_1^1, s_1^2, r_1^3, \ldots, r_1^N, r_2, \ldots, r_m)$;
  ...
- $y_N = (s_1, r_2, r_3, \ldots, r_N)$;
- $y_{N+1} = (s_1, s_2^1, r_2^2, \ldots, r_2^N, r_3, \ldots, r_m)$;
  ...
- $y_{2N} = (s_1, s_2, r_3, \ldots, r_m)$
  ...
- $y_{mN} = s'$.

Posons alors pour tout $j \in \{0, \ldots, mN\} = z_j = \phi(y_j)$. Alors , vu le choix de h (voir la deuxième étape), on a :

$\forall j \in \{0, \ldots, mN], z_j \in \frac{1+\varepsilon}{2} C$. Si maintenant on pose $x_j = \lambda \Delta z_j$, on aura bien :

$\forall j \in \{0, \ldots, mN\}, x_j \in \frac{1+\varepsilon}{2} B$.

De plus, si $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, \ldots, N\}$, on a :

$$T_{m_{(i+1)N+j}} \circ \Delta(z_{(i-1)N+j} - z_{(i-1)N+j-1}) =$$
$$\frac{1}{N} A_{n_i} (T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta)(0, \ldots, 0, s_{(i-1)N+j} - r_{(i-1)N+j}, 0 \ldots, 0)$$

(le $s_{(i-1)N+j} - r_{(i-1)N+j}$ est à la $(i-1)N + j$-ème place).

Aussi :

$$\delta_{i,j} = \|T_{m_{(i-1)N+j}} (x_{(i-1)N+j} - x_{(i-1)N+j-1})\|.$$

$$\leq \frac{2\lambda}{N} \|A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta)\|$$

Or, on a : $A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta) = A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}}) \circ \Delta_{|G_{n_i}}$ donc :

$$\|A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta)\| \leq \|A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}})\| \cdot \|\Delta_{|G_{n_i}}\|$$
$$m(A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta)) \geq m(A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}})\|m(\Delta_{|G_{n_i}})$$

et on sait que la suite des bolicités des altitudes est majorée par b, donc :

$$\|A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}})\| \leq b.m(A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}}))$$

et par définition de Δ : $m(\Delta_{G_{n_i}}) = \|\Delta_{G_{n_i}}\|$, donc finalement :

$$\begin{aligned} \delta_{i,j} &\leq \tfrac{2\lambda}{N} \|A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}})\| \cdot \|\Delta_{|G_{n_i}}\| \\ &\leq b\tfrac{2\lambda}{N} m(A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}}) m(\Delta_{|G_{n_i}}). \end{aligned}$$

Or, rappelons que N a été choisi de telle sorte que :

$$\frac{2b}{N} \leq \frac{\eta}{4} \frac{1-\varepsilon}{2}$$

donc finalement : $\delta_{i,j} \leq \frac{\eta}{4} \lambda m(A_{n_i}(T_{m_{(i-1)N+j}} \circ \Delta)) \frac{1-\varepsilon}{2}$.

4ème étape : conclusion : On a donc finalement construit une suite $x_0, \ldots, x_{mN}$ à valeurs dans $\frac{1+\varepsilon}{2}B$ telle que $x_0 = p$, $x_{mN} = q$ et telle que, si on joint le résultat de la première étape au résultat de la troisième étape, on a :

$$\forall n \in \{1, \ldots, mN\}, d(T_{k_n} x_n, T_{k_n} x_{n-1}) \leq \frac{\eta}{4} d(\partial T_{k_n}(\frac{1+\varepsilon}{2}B), \partial T_{k_n} B).$$

□

5 Démonstration du théorème 1.

1ère étape : choix des constantes :

Considérons f, p_0 et U comme dans l'énoncé du théorème 1 (U a été éventuellement diminué d'une façon que nous préciserons plus tard). On peut identifier un voisinage de p_0 avec un voisinage ouvert de 0 dans $G = T_{p_0}M$. Posons $m = \dim G$ et choisissons $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $\varepsilon^2 > \frac{2}{3}$.

On peut alors appliquer le théorème perturbatif (ainsi que son addendum à un η bien choisi que nous préciserons ultérieurement), qui nous fournit l'existence d'un voisinage V de

p_0 (identifié à O), d'un entier $N \geq 1$ et d'une forme de boîte rectangulaire $(e_1, \ldots, e_m, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ qui vérifient les conclusions du théorème. Remarquons que N ainsi que la forme de boite est valable aussi pour p appartenant à un voisinage de p_0, ce qui permettra de dire que la conclusion du théorème est valable sur un voisinage de p_0.

On normalise en définissant si $\lambda_1 = 1$: $\Lambda : G \to G$ par $\Lambda e_i = \lambda_i e_i$ ce qui permet, quitte à remplacer f au voisinage de p_0 par $f \circ \Lambda$ de supposer $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$. Quitte à diminuer V, on peut supposer que V est un cube d'arêtes parallèles aux e_i, de centre O et de côté $2r$, noté $V = C(O, r)$. On pose alors $W = C(O, \frac{\varepsilon^2}{3} r)$.

2ème étape : choix de deux points :

Considérons alors comme dans l'énoncé du théorème 1 un couple $(p, q) \in M^2$ tel que :

– ni p, ni q n'est élément de $\displaystyle\bigcup_{0 \leq n \leq N} f^n(V)$;

– il existe n_p, n_q deux entiers plus grands que 1 tels que $f^{n_p} p \in W$ et $f^{-n_q} q \in W$.

Soit alors $(p_n)_{0 \leq n \leq m_p}$ (resp. $(q_n)_{0 \leq n \leq m_q}$) la suite ordonnée des itérés positifs de p (resp. négatifs de q) sous f d'exposants inférieurs ou égaux à n_p (resp. supérieurs ou égaux à $-n_q$) qui sont dans V.

Notons $\|.\|_\infty$ la "norme sup" définie par : $\|x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq j \leq m} |x_j|$.

Remarquons que comme $p_{m_p} = f^{n_p}(p)$ et $q_{m_q} = f^{-n_q}(q)$ sont dans W :

$$\inf\{r - \|q_{m_q}\|_\infty, r - \|p_{m_p}\|\}_\infty \geq \quad r(1 - \frac{\varepsilon^2}{3}) \geq \frac{2r}{3} \geq \frac{2\varepsilon^2 r}{3} \geq \|q_{m_q} - p_{m_p}\|_\infty.$$

Posons alors :

$$\mathcal{A} = \{(i, j) \in [0, m_p] \times [0, m_q]; \|q_j - p_i\|_\infty \leq \inf\{r - \|q_j\|_\infty, r - \|p_i\|_\infty\}\}.$$

Comme $(m_p, m_q) \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est non vide. Il existe donc un élément (I, J) de $\mathcal{A}$ tel que :

$$\|q_J - p_I\| = \inf\{\|q_j - p_i\|; (i, j) \in \mathcal{A}\}.$$

On choisit alors un tel couple (I, J) de telle sorte que I soit minimal, puis pour ce I fixé de telle sorte que J soit minimal (i.e. un couple minimal pour l'ordre lexicographique). On pose alors $\mathcal{P} = \{p_j; j \in [0, I]\}$ et $\mathcal{Q} = \{q_j; j \in [0, J]\}$. Bien entendu, on suppose $p_I \neq q_J$, sinon le résultat à démontrer serait évident (pour $g = f$).

3ème étape : Construction de cubes :

Soit C un cube minimal (pour l'inclusion) d'arêtes parallèles aux e_i qui contient p_I et q_J, tel que $d_\infty(\partial C(0, r), \partial C) = \inf\{r - \|p_I\|_\infty, r - \|q_J\|_\infty\}$; on note c son côté (donc $c =$

$\|p_I - q_J\|_\infty)$; on pose pour tout $n \geq 0$:

$$C_n = (1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k)C;$$

et on coupe chaque $C_{n+1} \backslash C_n$ en cubes isométriques de côté $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} c$:

Figure 4

Remarquons que comme $d_\infty(\partial C(0,r), \partial C) = \inf\{r - \|p_I\|_\infty, r - \|q_J\|_\infty\} \geq \|p_I - q_J\|_\infty = c$, forcément $3C \subset C(0,r)$ et donc $c \leq \frac{2}{3}r$.

On décide alors de ne tenir compte que des p_i, q_j qui sont dans $\bigcup_{n\geq 0} C_n$, i.e. l'intérieur du cube $3C$. On les notera encore $p_0, \ldots p_I$, $q_0, \ldots, q_J$, bien que les I et J aient changé.

4ème étape : sélection de cubes et de points :

On ordonne les petits cubes construits précédemment de façon à ce que l'application (cube $\rightarrow$ longueur du côté) soit décroissante ; on obtient des cubes P_0, P_1, ...De plus, on renomme la suite : $p_0, p_1, \ldots, p_I, q_J \ldots q_1, q_0$ en la notant $x_0, \ldots x_{I+J+1}$ (et on les ordonne ainsi), on note $X = \{x_0, \ldots, x_{I+J+1}\}$. Ensuite, on sélectionne des cubes et des couples de points comme suit :

1) On considère $P_0 = C$; le premier couple de points est alors $(p_I, q_J) = (x_I, x_{I+1}) = (x_{i_0}, x_{i_1})$ et le premier cube est P_0 ; remarquons que par définition de I et J, C ne contient aucun point de la suite $(x_i)_{0\leq i\leq I+J+1}$ autre que p_I et q_J. On pose de plus : $\mathcal{I}_1 = [0, I+J+1] \backslash \{i_0, i_1\}$ et $X_1 = \{x_i; i \in \mathcal{I}_1\} = X \backslash \{p_I, q_J\}$.

2) Si aucun P_k après P_0 ne rencontre X_1, on arrête là la construction (dans ce cas, on a : $I = J = 0$) ;

sinon, soit P_k le premier des cubes après P_0 qui rencontre X_1 ; on pose alors : $i_2 = \inf\{i \in \mathcal{I}_1, x_i \in P_k\}$ et $i_3 = \sup\{i \in \mathcal{I}_1, x_i \in P_k\}$ (ces deux entiers pouvant être confondus). Deux cas peuvent se produire :

• si $[i_0, i_1] \subset [i_2, i_3]$, on oublie le premier couple, le remplaçant par (i_2, i_3), le premier couple de points devient (x_{i_2}, x_{i_3}) et la première boite P_k ; remarquons que cela ne peut se produire que si x_{i_2} est un p_i et x_{i_3} un q_j. Bien que cela nous serve pas (on n'a pas besoin d'exclure ce cas pour conclure), remarquons quand-même que ce cas ne se produit jamais. On a en effet :

Lemme 27 *Soit $k \geq 0$. Alors $3P_k \subset C(0, r)$. En particulier, soit $(x, y) \in P_k^2$. Alors on a :*

$$\|x - y\|_\infty \leq \inf\{r - \|x\|_\infty, r - \|y\|_\infty\}.$$

Aussi, l'existence de (p_i, q_j) comme décrit ci-dessus impliquerait que $(i, j) \in \mathcal{A}$ avec $\|p_i - q_j\|_\infty < c = \|p_I - q_J\|_\infty$, ce qui contredirait la définition de (I, J). Démontrons le lemme :

Démonstration du lemme : on sait déjà que :

$$d_\infty(\partial C(O, r), \partial C) = \inf\{r - \|p_I\|_\infty, r - \|q_J\|_\infty\} \geq \|p_I - q_J\|_\infty = c.$$

On en déduit immédiatement que $3C = 3P_0 \subset C(0, r)$. Or, si P_k est construit à la n-ième étape, on a : $P_k \subset C_n = (3 - \frac{1}{2^{n-1}})C$ et est de côté $\frac{c}{2^n}$, donc $3P_k \subset (3 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n})C = 3C \subset C(0, r)$.
La fin du lemme vient ensuite tout simplement du fait qu'on peut majorer $\|x - y\|_\infty$ par le diamètre δ (pour $\|.\|_\infty$) de P_k et minorer $\inf\{r - \|x\|_\infty, r - \|y\|_\infty\}$ par $d_\infty(P_k, \partial C(O, r)) \geq \delta$ (puisque $3P_k \subset C(O, r)$).

$\square$

• sinon, on garde les deux couples et les deux cubes.

On pose alors $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 \backslash [i_2, i_3]$, puis $X_2 = \{x_i ; i \in \mathcal{I}_2\}$.

3) Si X_2 ne rencontre aucun P_k, on arrête la construction de la suite. Sinon, soit P_k le premier cube qui rencontre X_2 ; on pose alors : $i_4 = \inf\{i \in \mathcal{I}_2, p_i \in P_k\}$ et $i_5 = \sup\{i \in \mathcal{I}_2, p_i \in P_k\}$ (ces deux entiers pouvant être confondus). Deux cas peuvent se produire :
• aucun des indices construits avant (i.e. un élément de $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$) n'est inclus dans $[i_4, i_5]$; on garde alors les trois couples de points ainsi que les cubes qui leur sont associé.
• sinon, on "oublie" les couples d'indices, et donc de points ou de cubes qui leur sont associés, qui sont intercalés entre i_4 et i_5 (dans notre cas, ce ne peut être que (i_2, i_3) toujours à cause du lemme précédent) : on n'a plus que deux couples de points et deux cubes.

On pose alors $\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_2 \backslash [i_4, i_5]$, puis $X_3 = \{x_i ; i \in \mathcal{I}_3\}$.

...

Puis on itère la construction : chaque fois (étape p) on prend le premier cube P_{k_p} parmi les suivants qui rencontre les termes restants de la suite (les éléments de X_{p-1}), on définit $i_{2p} = \inf\{i \in \mathcal{I}_{p-1}, x_i \in P_{k_p}\}$ et $i_{2p+1} = \sup\{i \in \mathcal{I}_{p-1}, x_i \in P_{k_p}\}$, et on supprime les indices i_n pour $n < 2p$ tels que $i_n \in [i_{2p}, i_{2p+1}]$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points, cela s'arrête au bout d'un nombre fini de pas. Qu'obtient-on finalement ?

• une partition de $\mathcal{I} = [0, I+J+1]$ en des segments de la forme $[i_{2p}, i_{2p+1}]$ pour $i \in [0, K]$ (éventuellement réduits à un point) ; on les réordonne en $([a_i, b_i])_{i\in[0,K]}$ de telle sorte que cette suite soit croissante (pour l'ordre sur $\mathbf{N}$) ;
• on note alors (y_i, z_i) le couple de points associé à $[a_i, b_i]$ (c'est donc un couple de la forme $(x_{i_{2p}}, x_{i_{2p+1}})$) ;
• on note B_i le premier cube qui contient y_i et z_i (c'est donc un P_{k_p})) ; notons que par construction, l'application $i \to B_i$ est injective.

5ème étape : étude des interractions entre les cubes choisis :

Lemme 28 *Il existe N^* constante qui ne dépend que de la dimension m (donc en particulier indépendante de la suite considérée) telle que :*

$$\forall i \in [0, K], \sharp\{j ; \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} P_j \cap \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} P_i \neq \emptyset\} \leq N^*.$$

De plus, si $\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} P_j \cap \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} P_i \neq \emptyset$, si c_i est la longueur du côté de P_i et c_j celle du côté de P_j, on a : $\frac{1}{4} \leq \frac{c_i}{c_j} \leq 4$.

Démonstration du lemme : Comme par hypothèse $\varepsilon^2 > \frac{2}{3}$, il suffit de montrer que : $\sharp\{j ; \frac{3}{2} P_j \cap \frac{3}{2} P_i \neq \emptyset\} \leq N^*$.

Or, vu la façon dont les cubes ont été contruits, si deux cubes $\frac{3}{2}P_i$ et $\frac{3}{2}P_j$ se rencontrent, c'est qu'ils on été construits soit à la même étape, soit à des étapes qui se suivent. En effet, supposons par exemple que P_i ait été construit à l'étape n et P_j à l'étape n' avec $n \leq n'$; alors $P_i \subset C_n$ et est de côté $\frac{c}{2^n}$, donc :

$$d_\infty(P_i, \partial(\frac{3}{2}P_i)) = (\frac{3}{2} - 1)\frac{c}{2^{n+1}} = \frac{c}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} d_\infty(C_n, \partial C_{n+1}).$$

De même : $P_j \subset C_{n'} \backslash C_{n'-1}$ et P_j est de côté $\frac{c}{2^{n'}}$ donc :

$$d_\infty(P_j, \partial(\frac{3}{2}P_j)) = \frac{c}{2^{n'+2}} = \frac{1}{8} d_\infty(C_{n'-2}, \partial C_{n'}).$$

Aussi, si $n' \geq n+2$, on a : $\frac{3}{2}P_j \cap \frac{3}{2}P_i = \emptyset$.

Fixons donc P_i, et supposons qu'il a été construit à la n-ième étape : son côté est $\frac{c}{2^n}$. Si $\frac{3}{2}P_j \cap \frac{3}{2}P_i \neq \emptyset$, le côté de P_j est de longueur supérieure ou égale à $\frac{c}{2^{n+1}}$ et inférieure ou égale à $\frac{c}{2^{n-1}}$ par ce qui précède. Quitte à diminuer les P_j en $\tilde{P}_j$ de côté $\frac{c}{2^{n+1}}$, on se trouve alors devant la situation suivante : les $\tilde{P}_j$ sont deux à deux quasi-disjoints (ils se rencontrent au plus suivant une face), inclus dans un cube fixé d'arête $\frac{15c}{2^{n-1}}$ (car $\frac{15c}{2^{n-1}} = 2c\left(\frac{1}{2^{n+1}}.\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n-1}}.\frac{3}{2}\right)$) ; il y en a donc au plus N^* où $N^* = 60^m$ (i.e. $N^* \left(\frac{c}{2^{n+1}}\right)^m = \left(\frac{15c}{2^{n-1}}\right)^m$). ∎

Nous venons d'énoncer un lemme pour les P_j ; comme les B_j sont des P_j, il est clair que le résultat est toujours vrai en remplaçant les P_i par les B_i.

6ÈME ÉTAPE : CHOIX DE η ET ÉTUDE D'UN CAS ÉLÉMENTAIRE

Désormais, on fixe η tel que :

$$\eta < \frac{\varepsilon_0^{N^*}}{16.4^{N^*}}$$

Remarquons que η dépend de ε_0 (trouvé à l'aide du lemme de perturbation) et N^*, i.e. de ε_0 et m mais heureusement ne dépend pas de $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ et N qui eux, sont fixés en fonction de η !

Quant au ε_0, il a été trouvé à l'aide du lemme de perturbation appliqué dans un ouvert U_0 contenant l'identité et au voisinage de p_0, ouvert qui vérifie : si $g_0, \cdots, g_r$ sont des éléments de U_0 à supports au voisinage de p_0 tels que tout point du voisinage de p_0 appartient à au plus un support de g_i , alors $g_r \circ \cdots \circ g_0 \circ f \in U$.

En appliquant le résultat perturbatif à chaque couple (y_i, z_i), on peut construire une perturbation g_i de f qui vérifie les conclusions de ce résultat perturbatif ainsi que de son addendum (on conviendra dans le cas où $y_i = z_i$ d'appeler "support de la perturbation" (qui en réalité est vide puisque $f = g_i$) le morceau d'orbite $\{y_i, fy_i, \ldots, f^{N-1}y_i\}$). Si les supports des $g_i^{-1} \circ f$ sont deux à deux disjoints, on considère la perturbation g de f qui coïncide avec chaque g_i sur chaque support de $g_i^{-1} \circ f_i$ et avec f partout ailleurs. On peut alors suivre l'orbite de p sous g :

• au début, l'orbite passe par p, $g(p) = f(p)$, $\ldots$, $y_0 = x_0 = p_0$;
• ensuite, elle passe par : $g(y_0)$, $g^2(y_0)$, $\ldots$, $g^N(y_0) = g_0^N(y_0) = f^N(z_0)$ par définition de g_0 ;
• ensuite, elle passe par : $g(f^N z_0) = f^{N+2}(z_0)$, $g^2(f^N z_0) = f^{N+2}(z_0)$, $\ldots$, y_1 ;
• ensuite, elle passe par : $g(y_1)$, $g^2(y_1)$, $\ldots$, $g^N(y_1) = g_1^N(y_1) = f^N(z_1)$ par définition de g_1 ;
$\ldots$
• et finalement elle passe par $y_K, g(y_K), g^2(y_K), \ldots, g^N(y_K) = g_K^N(y_K) = f^N(z_K) = f^N(q_0) = f^{-j}q$ par définition de g_K ;
• puis elle passe par $f^{-j+1}q, \ldots q$.

Et finalement p et q sont connectés.

Le problème est que les supports S_i des $g_i^{-1} \circ f$ peuvent se rencontrer. Dans ce cas, il faut tenir compte des interractions entre perturbations.

7ÈME ÉTAPE : PREMIER PAS DE LA CONSTRUCTION

Voici alors comment on procède : on commence à s'intéresser au couple (y_0, z_0) (le "premier" si on parle de l'ordre induit par celui des x_i). La pertubation g_0 est par construction telle que le support de $g_0 \circ f^{-1}$ est dans : $\bigcup_{n\in[1,N]} f^n(\frac{1}{\varepsilon}B_0)$. De plus, le support de $g_0 \circ f^{-1}$ intersecté avec

$f^n(\frac{1}{\varepsilon}B_0)$ est inclus dans une boule centrée sur $f^n(\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}B_0)$ de rayon $\eta d(\partial f^n(\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}B_0), \partial f^n(\frac{1}{\varepsilon}B_0))$. On sait alors qu'il existe au plus N^* B_j telles que $\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}B_j \cap \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}B_i \neq \emptyset$; on note $B_{k_0}, \ldots B_{k_{n^*}}$ ces cubes ordonnés suivant l'ordre des B_i (on a donc $n^* \leq N^* - 1$ et $k_0 = 0$) et $\mathcal{B}$ leur ensemble. Si les $\text{supp}(g_{k_i} \circ f^{-1})$ sont deux à deux disjoints, on arrète là la construction du premier pas. Sinon, on peut définir : $N_0 = \inf\{n \in [1, N]; \exists (B_{k_i}, B_{k_j}) \in \mathcal{B}^2, k_i \neq k_j \quad \text{et} \quad \text{supp}(g_{k_i} \circ f^{-1}) \cap \text{supp}(g_{k_j} \circ f^{-1}) \cap f^n(V) \neq \emptyset\}$. On prend au hasard deux éléments B_{k_i} et B_{k_j} de $\mathcal{B}$ tels que : $\text{supp}(g_{k_i}^{-1} \circ f) \cap \text{supp}(g_{k_j}^{-1} \circ f) \cap f^n(V) \neq \emptyset$ et $k_i < k_j$. On peut alors construire à l'aide du lemme de perturbation une perturbation $\tilde{g}$ de Id qui envoie $f \circ g_{k_i}^{N_0}(y_{k_i})$ sur $g_{k_j}^{N_0+1}(y_{k_j})$:

Figure 5

On a représenté sur la figure précédente en grisé foncé les supports S_{k_i} et S_{k_j} de $g_{k_i} \circ f^{-1}$ et $g_{k_j} \circ f^{-1}$ intersectés avec $f^{N_0+1}(V)$, puis en grisé clair le support de $\tilde{g}$: $\tilde{g}$ permet, quitte à augmenter le support de la perturbation, de connecter y_{k_i} à $f^N(z_{k_j})$ de la manière suivante : on définit h par :

- h coïncide avec f hors de $\displaystyle\bigcup_{0 \leq n \leq N-1} f^n(V)$;
- h coïncide avec g_{k_i} sur $\displaystyle\bigcup_{0 \leq n \leq N_0-1} f^n(V)$;
- h coïncide avec $\tilde{g} \circ f$ sur $f^{N_0}(V)$;
- h coïncide avec g_{k_j} sur $\displaystyle\bigcup_{N_0+1 \leq n \leq N-1} f^n(V)$.

Figure 6

Sur la figure précédente, nous avons représenté en grisé les supports des deux perturbations initiales $g_{k_i} \circ f^{-1}$ et $g_{k_j} \circ f^{-1}$ et entouré en gras le support de la perturbation finale $h \circ f^{-1}$. Ainsi, finalement, la perturbation finale h permet de connecter y_{k_i} à $f^N(z_{k_j})$. On va alors désormais "oublier" tous les termes de la suite (x_n) qui sont strictement entre y_{k_i} et z_{k_j}, et finalement ne garder que les couples (y_n, z_n) non compris entre y_{k_i} et z_{k_j}, ainsi que le couple (y_{k_i}, z_{k_j}). On peut renommer ces couples $((y_i, z_i))_{i\in[0,K]}$ (bien-sûr le "K" a changé ainsi que la numérotation des (y_i, z_i)) en suivant toujours l'ordre induit par celui des x_i ; à chacun de ces couples est alors associée une perturbation notée g_i qui permet de connecter y_i à z_i (c'est h pour le couple (y_{k_i}, z_{k_j}) avec l'ancienne notation). D'autre part, comme on est toujours dans le premier pas de la construction, on ne s'intéresse encore une fois qu'aux couples (y_i, z_i) telle que le cube qui contient y_i et le cube qui contient z_i est en interraction avec B_0 : il y a cette fois au plus $N^* - 1$ tels couples (nous venons d'en réduire le nombre). On recommence alors la construction que nous venons de faire avec ces au plus $N^* - 1$ couples, on répète l'opération autant de fois qu'on le peut : on a fini en au plus $N^* - 1$ étapes :

Figure 7

Sur la figure précédente est représentée l'une des situations pouvant se produire (en gras le support de la nouvelle perturbation).

On peut alors se poser la question suivante : n'a-t-on pas "trop" agrandi les supports des perturbations, ne sort-on pas des $f^n(V)$, ne crée-t-on pas des nouvelles interractions entre les couples ? Pour répondre à cette question, on doit analyser de "combien" on a agrandi les supports des perturbations considérées. Regardons ce que nous avons fait à la première étape : on a construit $\tilde{g}$ à l'aide du lemme de perturbation telle que : $\tilde{g}(f \circ g_{k_i}^{N_0}(y_{k_i})) = g_{k_j}^{N_0+1}(y_{k_j})$. Or, $f \circ g_{k_i}^{N_0}(y_{k_i})$ et $g_{k_j}^{N_0+1}(y_{k_j})$ respectivement étaient dans les supports S_i et S_j de $g_{k_i} \circ f^{-1}$ et $g_{k_j} \circ f^{-1}$ intersectés avec $f^{N_0}(V)$, ces supports étant par l'addendum du résultat perturbatif tels que :

- S_i est inclus dans une boule centrée sur $f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_i})$ de rayon inférieur à : $\eta.d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_i}), \partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_i}))$ (en particulier S_i est inclus dans $f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}B_{k_i})$) ;
- S_j est inclus dans une boule centrée sur $f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_j})$ de rayon inférieur à : $\eta.d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_j}), \partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_j}))$ (en particulier S_j est inclus dans $f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}B_{k_j})$).

Alors, comme $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ (on considère un tel couple), ceci implique déjà que $\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}B_{k_i} \cap \frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}B_{k_j} \neq \emptyset$, i.e. qu'il y a ce que j'appelle une interraction entre B_{k_i} et B_{k_j} ; de plus, forcément (on utilise le lemme perturbatif) le support de $\tilde{g}$ est inclus dans une boule B qui rencontre $f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_i})$ et $f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_j})$ de rayon :

$$\frac{2}{\varepsilon_0}\eta\left(d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_j}), \partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_j})) + d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_i}), \partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_i}))\right).$$

Or, quitte à avoir choisi V assez petit, on peut supposer que les f^n sont proches de leurs applications affines tangentes :

$$\forall n \in [0, N], \forall (x,y) \in V^2,$$
$$\tfrac{1}{2}\|D(f^n)(p)(x-y)\| \leq d(f^n(x), f^n(y)) \leq 2\|D(f^n)(p)(x-y)\|$$

(on suppose s'être placé dans des cartes). On en déduit que si on note c_i le côté du cube B_{k_i} et c_j le côté du cube B_{k_j}, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_j}), \partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_j})) &\leq \frac{c_j}{c_i}d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_i}), \partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_i}))\\ &\leq 4d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_j}), \partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_j}))\end{aligned}$$

Or, par le lemme de la cinquième étape, on sait que $\frac{1}{4} \leq \frac{c_i}{c_j} \leq 4$ puisque B_{k_i} et B_{k_j} présentent une interraction. Finalement, on trouve que le rayon de B (qui contient le support de $\tilde{g} \circ f^{-1}$)

est plus petit que :

$$\frac{64}{\varepsilon_0}\eta \inf\left\{d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_j}),\partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_j})),d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_i}),\partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_i}))\right\}.$$

En particulier, vu le choix de η, ce support est à la fois inclus dans $f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}B_{k_i})$ et dans $f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}B_{k_j})$. On sait aussi, inégalité qui nous intéresse plus pour initier une récurrence, que le rayon de B est plus petit que :

$$\frac{4}{\varepsilon_0}\eta \sup\left\{d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_j}),\partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_j})),d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B_{k_i}),\partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B_{k_i}))\right\}.$$

Si d'autres interractions se présentent, on continue à agrandir le support de la perturbation, oublier des couples par le même procédé que ci-dessus,...et on a que : si la perturbation h est construite à l'aide de l'interraction de $n_0 \leq N^*+1$ cubes B'_1,..., B'_{n_0}, alors le support de $h\circ f^{-1}$ est inclus dans une boule B qui rencontre tous les $f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B'_i)$ et qui est de rayon :

$$\frac{4^{n_0-1}}{\varepsilon_0^{n_0-1}}\eta \sup\left\{d(\partial f^{N_0}(\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B'_i),\partial f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon}B'_i)); i\in[1,n_0]\right\}.$$

Vu le choix de η, on en déduit que B est dans l'une des $f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}B'_{i_0})$ (celle qui correspond au cube B'_i le plus "grand"), donc que les B'_i sont en interraction avec B'_{i_0} (il ne peut donc y en avoir N^*+1, il y en a au plus N^*). Aussi, vu le lemme de la cinquième étape et le fait que f^{N_0} est proche de son application tangente :

$$\begin{aligned}&\sup\left\{d(\partial f^{N_0}(\tfrac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B'_i),\partial f^{N_0}(\tfrac{1}{\varepsilon}B'_i)); i\in[1,n_0]\right\}\\ &\leq 16\inf\left\{d(\partial f^{N_0}(\tfrac{\varepsilon+1}{2\varepsilon}B'_i),\partial f^{N_0}(\tfrac{1}{\varepsilon}B'_i)); i\in[1,n_0]\right\}\end{aligned}$$

donc finalement vu le choix de η, B est incluse dans chaque $f^{N_0}(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}B'_i)$.

Finalement, on a tenu compte de toutes les interractions possibles avec B_0, et on obtient une suite de couples encore notée $(y_i,z_i)_{0\leq i\leq K}$, tels que chaque y_i est connectable à $f^N(z_i)$ à l'aide de h_i, avec :
• $[y_0,z_0]$, ..., $[y_K,z_K]$ est une partition ordonnée de $[x_0,x_{I+J+1}]$ (les intervalles sont pris pour l'ordre des x_i (en particulier $y_0=x_0$ et $z_K=x_{I+J+1}$) ;
• chaque h_i est construite à partir du procédé décrit précédemment, à l'aide d'un certain nombre $n_i\leq N^*$ de couples de la suite initiale (auxquels correspond un ensemble $\mathcal{B}_i$ de cubes) ;

• en particulier le support S_i de chaque $h_i \circ f^{-1}$ est inclus dans $\bigcup_{1 \leq n \leq N} f^n(3C)$ et pour tout $n \in [1, N]$, $S_i \cap f^n(V)$ est inclus dans une boule de rayon :

$$\frac{4^{n_i - 1}}{\varepsilon_0^{n_i - 1}} \eta \sup \left\{ d(\partial f^n(\frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} B), \partial f^n(\frac{1}{\varepsilon} B)); B \in \mathcal{B}_i \right\}$$

qui rencontre chaque $\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon} B$ pour chaque élément B de $\mathcal{B}_i$.

8ÈME ÉTAPE : FIN DE LA CONSTRUCTION

Si à la fin du premier pas on n'a plus qu'un couple, on a fini, on arrète la construction. Sinon, on considère le cube B' suivant (pas un de ceux qu'on a oublié, bien sûr), ainsi que tous ceux qui sont en interraction avec lui et on fait la même construction que pour B_0 ; signalons qu'il se peut qu'on ait déjà "touché" à ce qui se passait dans $\bigcup_{0 \leq n \leq N-1} f^n(B')$, mais cela ne nous gêne pas et on continue à agrandir le support des perturbations par la méthode décrite précédemment : si on a déjà tenu compte d'une interraction au pas précédent, on n'en tient plus compte à ce pas.

Finalement et comme au pas précédent, on a tenu compte de toutes les interractions possibles avec B_0 et B', et on obtient une suite de couples encore notée $(y_i, z_i)_{0 \leq i \leq K}$, tels que chaque y_i est connectable à $f^N(z_i)$ à l'aide de h_i, avec :

• $[y_0, z_0]$, …, $[y_K, z_K]$ est une partition ordonnée de $[x_0, x_{I+J+1}]$ (les intervalles sont pris pour l'ordre des x_i (en particulier $y_0 = x_0$ et $z_K = x_{I+J+1}$) ;

• chaque h_i est construite à partir du procédé décrit précédemment, à l'aide d'un certain nombre $n_i \leq N^*$ de couples de la suite initiale (auxquels correspond un ensemble $\mathcal{B}_i$ de cubes) ;

• en particulier le support S_i de chaque $h_i \circ f^{-1}$ est inclus dans $\bigcup_{1 \leq n \leq N} f^n(V)$ et pour tout $n \in [1, N]$, $S_i \cap f^n(V)$ est inclus dans une boule de rayon :

$$\frac{4^{n_i - 1}}{\varepsilon_0^{n_i - 1}} \eta \sup \left\{ d(\partial f^n(\frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} B), \partial f^n(\frac{1}{\varepsilon} B)); B \in \mathcal{B}_i \right\}$$

qui rencontre chaque $\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon} B$ pour chaque élément B de $\mathcal{B}_i$.

Puis on considère le cube suivant, et ainsi de suite jusqu'à un nombre fini de pas puisque seul un nombre fini de cubes est concerné.

Enfin, on obtient une suite de couples encore notée $(y_i, z_i)_{0 \leq i \leq K}$ et une suite d'éléments $(h_i)_{0 \leq i \leq K}$ de U_0 telles que :

• $[y_0, z_0]$, …, $[y_K, z_K]$ est une partition ordonnée de $[x_0, x_{I+J+1}]$ (les intervalles sont pris pour l'ordre des x_i (en particulier $y_0 = x_0$ et $z_K = x_{I+J+1}$) ;

• les h_i sont tous à supports S_i dans $\bigcup_{1\leq n\leq N} f^n(3C)$ et sont à supports deux à deux disjoints ;
• on a : $\forall i \in [0,K], (h_i \circ f)^N(y_i) = z_i$.

Ainsi, la fonction g qui coïncide avec $h_i \circ f$ sur chaque $f^{-1}(S_i)$ et avec f partout ailleurs est dans U et l'orbite de p sous g passe successivement par :
• $g(p) = f(p), \ldots, y_0 = x_0 = p_0$;
• ensuite, elle passe par : $g(y_0), g^2(y_0), \ldots, g^N(y_0) = (h_0 \circ f)^N(y_0) = f^N(z_0)$ par définition de h_0 ;
• ensuite, elle passe par : $g(f^N z_0) = f^{N+1}(z_0), g^2(f^N z_0) = f^{N+2}(z_0), \ldots, y_1$;
• ensuite, elle passe par : $g(y_1), g^2(y_1), \ldots, g^N(y_1) = (h_1 \circ f)^N(y_1) = f^N(z_1)$ par définition de g_1 ;
...
• et finalement elle passe par $y_K, g(y_K), g^2(y_K), \ldots, g^N(y_K) = (h_K \circ f)^N(y_K) = f^N(z_K) = f^N(q_0) = f^{-j}q$ par définition de g_K ;
• puis elle passe par $f^{-j+1}q, \ldots q$.
Et finalement p et q sont connectés.

$\square$

Remarque : Dans la construction précédente, nous avons considéré le premier cube, puis le second,. . ., de sorte qu'à chaque pas de construction on ne modifiait pas la partie du support des perturbations qui était contenue dans ces cubes précédents.
Il est à noter en fait qu'on aurait pu faire la construction en changeant l'ordre des cubes, on aurait obtenu encore une fois une “bonne” perturbation : c'est en fait l'une des difficultés de la démonstration qu'il n'existe pas vraiment de mode de construction canonique.

6 Démonstration des autres résultats de l'introduction.

6.1 Démonstration de la proposition 2.

Si le point p_0 n'est pas périodique, le résultat est une conséquence du théorème 1. Soit en effet U comme dans l'énoncé ; on trouve en appliquant le théorème 1 un entier $N \geq 1$. Soit alors V un voisinage de p_0, V_p et V_q comme dans l'énoncé. Quitte à réduire V_p et V_q, on peut supposer comme ni p ni q ne sont dans $\bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(\bar{V})$, que : $(V_p \cup V_q) \cap \bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(\bar{V}) = \emptyset$.
Or, comme $p_0 \in F(p,f) \cap B(q,f)$, il existe $x \in V_p$ et $y \in V_q$ tels qu'il existe $n_p \geq 1$ et $n_q \geq 1$ vérifiant : $f^{n_p}x \in W$ et $f^{-n_q}y \in f^N W$ (où W est donné par le théorème 1) ; on applique alors le théorème 1 et on trouve $g \in U$ égal à f hors de $\bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(\bar{V})$ connectant x à y,

donc tel que :

$$\bigcup_{n\geq 1} g^n(V_p) \cap V_q \neq \emptyset.$$

Supposons donc que p_0 est périodique. Par hypothèse, il est donc hyperbolique. Pour simplifier, nous allons traiter le cas où p_0 est un point fixe, celui où p_0 est périodique de période supérieure ou égale à 2 n'étant pas tellement différent : il faut juste, si p_0 est périodique de période m, travailler dans voisinage V de p_0 tel que $V, f(V), \cdots, f^{m-1}(V)$ sont deux à deux disjoints et remplacer f par f^m.

Quitte à diminuer le V de l'énoncé, on peut supposer que V est un des voisinages "standard" qu'on considère quand on travaille au voisinage d'un point fixe hyperbolique, i.e. de la forme :

Figure 8

On appelle alors "entrée" l'ensemble $E = V \backslash f(V)$ et "sortie" $S = V \backslash f^{-1}(V)$. Notons alors W^s et W^u les variétés locales dans V stables et instables de p_0. Alors $\overline{W^s \cap E}$ est un compact sans point périodique dont tout point p vérifie $\omega(p, f) \neq \emptyset$ (puisque $\omega(p, f) = \{p_0\}$) et $\overline{W^u \cap S}$ est un compact sans point périodique dont tout point vérifie : $\alpha(p, f) \neq \emptyset$ (puisque $\alpha(p, f) = \{p_0\}$). On peut alors en chaque point de ces compacts appliquer le théorème 1 (pour f dans le cas de $\overline{W^s \cap E}$ et pour f^{-1} dans le cas de $\overline{W^u \cap S}$), et comme ces ensembles sont compacts, on obtient un N uniforme.

On choisit alors V de telle sorte que $\displaystyle\bigcup_{0\leq n\leq N} f^n(E)$ et $\displaystyle\bigcup_{0\leq n\leq N} f^{-n}(S)$ soient dans V et disjoints.

Alors, pour tout $V' \subset V$ voisinage standard inclus dans V (on note E' et S' son entrée et sa sortie qui sont respectivement incluses dans E et S), on obtient ainsi W, voisinage standard de p_0 inclus dans V' (on notera alors E_1 son entrée et S_1 sa sortie) et $\varepsilon > 0$ tel que :

(1) si $(p,q) \in (M \backslash \bigcup_{0\le n\le N} f^n(E'))^2$ sont tels qu'il existe $x \in W^s \cap E_1$, $n_p \ge 0$ et $n_q \ge 0$ vérifiant $f^{n_p}p \in E_1$ et $f^{-n_q}q \in f^N E_1$,et $d(f^{n_p}p, x) < \varepsilon$ et $d(x, f^{-n_q-N}q) < \varepsilon$, alors il existe $g \in U$ de classe C^k égal à f en dehors de $\bigcup_{0\le n\le N-1} f^n(E')$ et tel que q est sur l'orbite positive de p sous g. En fait, on peut même préciser : pour tout V_x voisinage de x inclus dans E, il existe W_x voisinage de x inclus dans E' tel que si $f^{n_p}p \in W_x$ et $f^{-n_q}q \in f^N W_x$, alors on peut imposer que $f = g$ en dehors de : $\bigcup_{0\le n\le N-1} f^n(V_x)$.

(2) si $(p,q) \in (M \backslash \bigcup_{0\le n\le N-1} f^{-n}(S))^2$ sont tels qu'il existe $x \in W^u \cap S_1$, $n_p \ge 0$ et $n_q \ge 0$ vérifiant $f^{n_p}p \in f^{-N}(S_1)$ et $f^{-n_q}(q) \in S_1$ et $d(x, f^{n_p+N}p) < \varepsilon$ et $d(x, f^{-n_q}q) < \varepsilon$, alors il existe $g \in U$ de classe C^k égal à f en dehors de $\bigcup_{0\le n\le N-1} f^n(S')$ et tel que q est sur l'orbite positive de p sous g. Comme dans le cas (1), on peut aussi s'arranger pour avoir un support de perturbation proche de $\{x, f(x), \dots, f^N x\}$.

Soient maintenant p, q, V, V_p, V_q, comme dans l'énoncé de la proposition 2. Plusieurs cas peuvent se présenter :

1) Supposons que $F(p,f) \cap B(q,f)$ contienne un point de $W^s \backslash \{p_0\}$ ou de $W^u \backslash \{p_0\}$, noté p_1 ; supposons par exemple que $p_1 \in W^s$; on utilise le (1) et le théorème 1 au voisinage de p_1 pour connecter directement un point de V_p à un point de V_q.

2) Sinon, on va tout d'abord essayer de placer p sur la variété stable et q sur la variété instable. Soit $p_1 \in F(p,f) \cap E \cap W^s$ et soit $q_1 \in B(q,f) \cap E \cap W^u$; l'idée est d'utiliser le (1) et le théorème 1 au voisinage de p_1 et le (2) et le théorème 1 au voisinage de q_1.

Plus précisément, tout d'abord on choisit des voisinages V_1 et W_1 de p_1 et q_1 respectivement tels que :

$$\left(\bigcup_{0\le n\le N-1} f^n(V_1)\right) \cap \left(\bigcup_{0\le n\le N-1} f^{-n}(W_1)\right) \neq \emptyset.$$

De plus, comme $p_1 \notin B(q,f)$, on sait que, quitte à diminuer V_q et V_1, V_1 est disjoint d'avec $\bigcup_{0\le n} f^{-n}V_q$; de même, comme $q_1 \notin F(p,f)$, on sait que, quitte à diminuer V_p et W_1, W_1 et $\bigcup_{0\le n} f^n V_p$ sont disjoints.

On applique alors le théorème 1 pour V_1 qui permet de connecter un élément p' de V_p à W^s en faisant une perturbation à support dans $\bigcup_{0\le n\le N-1} f^n(V_1)$, donc dont le support ne rencontre pas $\bigcup_{0\leq n} f^{-n}V_q$. En particulier, on a encore : $q_1 \in B(q,g)\cap E\cap W^u(g)$, et on n'a pas modifié f sur $\bigcup_{0\leq n\leq N-1} f^n(W_1)$; on peut alors appliquer le théorème 1 et le (2) au voisinage de q_1, qui permet de connecter W^u à un point q' de V_q. De plus, en faisant ceci, on ne touche pas à l'orbite précédemment contruite si on choisit un voisinage de q_1 assez petit.

Finalement, on a fait une perturbation de f de manière à ce que p' soit sur la variété stable de p_0, et q' sur la variété instable de p_0.

Figure 9

Soit alors p'' un itéré positif de p' sous g proche de p_0 (dans W) et q'' un itéré négatif de q' sous g proche de p_0 (dans W). Il est facile, pour tout voisinage V_1 de p'' et V_2 de q'' de trouver une orbite sous g qui connecte V_1 à V_2 dans W (voir figure précédente).

Si on applique maintenant le théorème 1 au voisinage de p'' pour f et de q'' pour f^{-1}, on arrive finalement à connecter p' à q' en faisant encore une perturbation :

Figure 10

$\square$

Remarque : en fait, la dernière perturbation effectuée dans la démonstration (connecter un point de $W^S(p_0)$ à un point de $W^u(p_0)$) peut se faire de façon "petite" en topologie C^∞ (ainsi que par exemple le remarquent les auteurs de [13]en dimension 2).

6.2 Démonstration des résultats de la section 1.2.

Démonstration de la proposition 3 :
$(P_0, \cdots, P_N)$ étant une (α, ω)-chaîne minimale, les orbites des P_0 sont deux à deux distincts, sauf éventuellement celles de P_0 et P_N. Remarquons que si P_N est sur l'orbite strictement positive de P_0, alors $N = 1$ et on a directement le résultat. On supposera donc désormais que $P_N \notin O_+(P_0)$.

Supposons dans un premier temps que les P_j ne sont pas périodique.
Utilisons alors le théorème 1 de l'introduction pour U et f, qui nous fournit un entier $N^* \geq 1$ valable en $P_0, \cdots, P_N$. On choisit alors des voisinages $V_0, V_1, \cdots, V_{N-1}$ de $P_0, P_1, \cdots, P_{N-1}$ tels que les ensembles :
$\bigcup_{0 \leq n \leq N^*} f(V_0), \cdots, \bigcup_{0 \leq n \leq N^*} f^n(V_{N-1})$ sont deux à deux disjoints.
De plus, comme la (α, ω)-chaîne est minimale, on peut quitte à diminuer les V_i supposer que : si $i + 1 \neq j$, alors

$$\bigcup_{n\geq 0} f^n(V_i) \cap V_j = \emptyset.$$

(sinon, si ceci est faux pour tout couple de voisinages, on peut réduire la longueur de la (α,ω)-chaîne).

On applique alors le théorème 1 en $P_1,\cdots,P_{N-1}$ dans le cas (a) où $P_0 \neq P_N$ et $P_0,\cdots,P_{N-1}$ dans le cas (b) où $P_0 = P_N$, qui nous fournit des voisinages $W_1,\cdots,W_{N-1}$ (ou $W_0,\cdots,W_{N-1}$) de $P_1,\cdots,P_{N-1}$ (ou $P_0,\cdots,P_{N-1}$). Comme $(P_0,\cdots,P_N)$ est une (α,ω)-chaîne, on peut trouver :

- dans le cas (a) : pour tout $k \in \{1,\cdots,N\}, x_k \in W_{k-1}$ et $n_k \geq 1$ tel que : $f^{n_k}x_k \in W_k$.
- dans le cas (b) : pour tout $k \in \{1,\cdots,N\}, x_k \in W_{k-1}$ et $n_k \geq 1$ tel que $f^{n_k}x_k \in W_k$ (on pose $W_N = W_0$) avec bien entendu dans les deux cas :

$$\forall k \in \{1,\cdots,N-1\}, \forall j \in \{1,\cdots,n_{k-1}\}, f^j x_k \notin \bigcup_{0\leq n\leq N-1} W_n.$$

On applique alors le théorème 1 :

- d'abord en P_1 si $N > 1$: il permet de connecter $x_1 \in W_0$ à $f^{n_2}x_2 \in W_2$ en passant par V_1. Remarquons que comme la perturbation est à support dans $\bigcup_{n\in[0,N^*-1]} f^n(V_1)$, cette perturbation ne change pas l'orbite positive des x_i pour $i \in [3,N]$. De plus, avant d'entrer dans V_2, l'orbite de x_1 passe obligatoirement par V_1, puisque sinon ce serait l'orbite de x_1 sous f, qui elle ne rentrait pas dans V_2 :
- ensuite et si $N > 2$, en P_2 : on peut alors connecter $x_1 \in W_0$ à $f^{n_3}x_3 \in W_3$ en passant par V_2 à l'aide d'une perturbation à support dans $\bigcup_{n\in[0,N^*-1]} f^n(V_2)$, et l'orbite de $x_1 \in W_0$ passe alors par V_1, puis V_2, puis $f^{n_3}x_3 \in W_3$. On remarque comme précédemment qu'avant d'entrer dans V_3 cette orbite passe forcément par V_1 puis V_2.
- On continue la construction jusqu'au rang $N-1$.

Figure 11

On obtient alors g qui connecte $x_1 \in W_0$ à $f^{n_N} x_N \in W_N$ en passant successivement par $y_1 \in V_1, \ldots, y_{N-1} \in V_{N-1}$. Deux possibilités se présentent alors :

- soit $P_0 \neq P_N$; on utilise alors une petite perturbation h de l'identité telle que :

$$h(P_0) = x_0, h(P_1) = y_1, \cdots, h(P_{N-1}) = y_{N-1}, h(P_N) = f^{n_N} x_N.$$

  Alors, à condition d'avoir au début choisi les V_i assez petits, $h^{-1} \circ g \circ h$ est proche en topologie C^1 de f, et l'orbite de P_0 sous ce difféomorphisme passe successivement par P_0, P_1, ..., P_N dans cet ordre ;
- soit $P_0 = P_N$; on utilise alors le théorème 1 en P_0 pour connecter $f^{n_N} x_N$ à y_1, ce qu'on peut faire sans toucher au bout d'orbite qui connecte y_1 à $f^{n_N} x_N$ (puisque ce bout d'orbite est inclus dans $\displaystyle\bigcup_{1 \leq k \leq N-2} \bigcup_{n \geq 0} f^n(V_k)$ et le suport de cette dernière perturbation est inclus dans $\displaystyle\bigcup_{n \in [0, N^*-1]} f^n(V_0)$). Aussi, finalement, l'orbite de $y_0 \in V_0$ passe par $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$, ..., $y_{N-1} \in V_{N-1}$, y_0. Ensuite, on utilise h telle que : $\forall i \in \{0, \ldots, N-1\}, h(P_i) = y_i$ et on utilise comme précédemment $h^{-1} \circ g \circ h$.

Ceci termine le cas où les P_j ne sont pas périodiques.

Dans le cas où au moins un des points P_n considéré est périodique (hyperbolique donc), on remplace les P_n périodiques par :

• soit un point de sa variété stable ou instable quand c'est possible ;
• sinon un point de sa variété stable et un point de sa variété instable.

On obtient encore une (α, ω)-chaîne, mais celle-ci n'est plus forcément minimale. Mais en fait, les seules obstructions au fait qu'elle soit minimale sont les couples de points sur la variété stable et instable d'un même point périodique qu'on a rajouté. Alors on fait la même construction que dans le cas où les P_n n'étaient pas périodiques, ce qui nous permet cette fois non pas d'obtenir forcément une vraie orbite, mais des connexions hétéroclines se succédant (de façon analogue à ce qu'on avait fait dans la démonstration de la proposition 4) :

Figure 12

On utilise alors le même procédé que dans la démonstration de la proposition 4 pour transformer cette succession de connexions en une vraie orbite. On fait ensuite une petite conjugaison comme dans le cas précédent pour faire passer cette orbite par les points voulus.

$\square$

Démonstration du corollaire 4 :

Nous avons déjà remarqué que l'ensemble $\mathcal{H}$ des difféomorphismes dont tous les points périodiques sont hyperboliques forment un G_δ-dense de $\mathrm{Diff}^1(M)$ donc un espace de Baire. On va donc travailler dans $\mathcal{H}$.

Soit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts de M. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on définit une propriété $\mathcal{P}_{n,m}$ sur $\mathcal{H}$ comme suit : on dit que $f \in \mathcal{H}$ satisfait $\mathcal{P}_{n,m}$ si f vérifie au moins l'une des conditions suivantes :

(i) il existe U voisinage de f tel que pour tout $g \in U$ dont tous les points périodiques sont hyperboliques on ait :
"il n'existe pas de (α, ω)-chaîne pour g joignant un point de V_n à un point de V_m".

(ii) On a :

$$\left(\bigcup_{k \geq 1} f^k(V_n) \right) \cap V_m \neq \emptyset$$

Cette propriété, réunion de deux propriétés ouvertes, définit un ouvert de $\mathcal{H}$. Si on montre que cette propriété est dense, comme $\mathcal{H}$ est un espace de Baire, on saura que :

$$\mathcal{G} = \{f \in \mathcal{H}, \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \mathcal{P}_{n,m}(f) \text{est vraie}\}$$

est un G_δ-dense de $\mathcal{H}$ donc de $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Dans ce cas, si $f \in \mathcal{G}$, considérons p et q deux points de M. On peut choisir une base de voisinages de p, $(V_p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une base de voisinages de q, $(V_q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitués d'élément de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Deux cas se présentent alors :

- soit il existe V_p, V_q voisinage de p, q respectivement et un voisinage U de f dans $\mathcal{H}$ tels que pour tout $g \in U$ dont tous les points périodiques sont hyperboliques on ait :
  "il n'existe pas de (α,ω)-chaîne pour g joignant un point de V_p à un point de V_q", alors on a le (i) du corollaire 4 ;
- sinon on a en particulier : pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\left(\bigcup_{n\geq 1} f^n(V_p^n)\right) \cap V_q^m \neq \emptyset$$

  ce qui donne le (ii) du corollaire 3.

Il reste donc à montrer que $\mathcal{P}_{n,m}$ est une propriété dense. Soit $f \in \mathcal{H}$ et U un voisinage ouvert de f dans $\mathcal{H}$. On veut montrer que U contient un élément vérifiant $\mathcal{P}_{n,m}$. Supposons le contraire. En particulier, f ne vérifie pas le (i) de $\mathcal{P}_{n,m}$, donc il existe $g \in U$ tel qu'il existe une (α,ω)-chaîne pour g joignant un élément p de V_n à un élément q de V_m. Mais alors, par la proposition 3, il existe $h \in U$ permettant de connecter p à q, donc h vérifie $\mathcal{P}_{n,m}$. $\square$

Démonstration du corollaire 5 : Le corollaire 4 implique que pour tout $f \in \mathcal{G}$, l'ensemble des points de $M(f)$ non errants est dense dans l'ensemble des points (α,ω)-récurrent ; le closing lemma (voir [16]) implique alors que l'ensemble des points périodiques de M est dense dans l'ensemble des points non errants de $M(f)$, donc dans l'ensemble des points (α,ω)-récurrents de M. $\square$

Remarque : On pourrait en fait partir de la proposition 3 pour démontrer ce corollaire, sans invoquer le closing lemma.

Démonstration de la proposition 6 : c'est en fait une conséquence immédiate du théorème 1 ; soient p_1, p, U et q comme dans les hypothèses de la proposition 6. On peut appliquer le théorème 1 en p pour f^{-1} et U^{-1}, ce qui fournit un N. Quitte à prendre un voisinage V de p assez petit, on peut trouver une perturbation $g \in U$ qui connecte $f^{-(N+1)}p$ à q en passant par $x \in V$ et qui ne change pas le fait que p_1 est périodique hyperbolique et $f^{-N-1}p \in W^u(p_1, g)$.

On utilise alors un difféomorphisme h proche de l'identité qui vaut l'identité au voisinage de l'orbite de p_1, qui envoie p sur x et fixe q. Alors $h^{-1} \circ f \circ h$ vérifie les conclusions de la proposition 6. $\square$

Démonstration de la proposition 7 : Cette fois on applique le théorème 1 en p pour f^{-1} et U^{-1} et en q pour f et U. On utilise des voisinages (petits) V_q et V_p de p et q, on en déduit des voisinages W_p et W_q à l'aide du théorème 1. On trouve alors comme $q \in F(p, f)$ une orbite qui joint $y \in W_p$ à $z \in W_q$; appliquant le théorème 1 en p, on perturbe f en g de telle sorte que p_1 et q_1 sont toujours périodiques hyperboliques, que $f^{-(N+1)}p \in W^u(p_1, g)$, que $q \in W^s(q_1, g)$ et que l'orbite de $f^{-N-1}p$ passe par V_p, puis par $z \in W_q$.
Ensuite, on applique le théorème en q, ce qui finalement permet de connecter $f^{-N-1}p \in W^u(p_1, g')$ à $f^{N+1}q \in W^s(q_1, g')$ en passant par V_p, puis V_q ; comme dans la démonstration précédente, on utilise une petite conjugaison pour connecter exactement p à q. $\square$

Démonstration de la proposition 8 : Supposons tout d'abord que p ne soit pas périodique. Appliquant le théorème 1 en p, on connecte facilement p_1 à q_1 à l'aide d'une orbite hétérocline qui passe en p' près de p, puis on utilise une petite conjugaison pour envoyer p' sur p.
Ensuite, si $p \notin O(p_1, f) \cup O(q_1, f)$ est périodique, on raisonne comme dans la démonstration de la proposition 2 pour connecter $W^u(O(p_1), f)$ à $W^s(p, f)$, puis $W^u(p, f)$ à $W^s(O(q_1), f)$, puis on fait une petite perturbation au voisinage de p comme dans la démonstration de la proposition 2 pour connecter vraiment $W^u(O(p_1), f)$ à $W^s(O(q_1), f)$ par une orbite passant près de p, donc en p à l'aide d'une petite conjugaison. $\square$
Remarquons que si maintenant $p \in O(p_1, f) \cup O(q_1, f)$, on se ramène à la proposition 6 en changeant éventuellement le point de l'orbite périodique considéré, mais cela donne encore le résultat souhaité.

6.3 Démonstration des résultats de la section 1.3.

La proposition 9 est une trivialité.
Démonstration de la proposition 10 : On considère $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ base d'ouverts de M. On définit alors pour chaque $(n, m) \in \mathbf{N}^2$:

$$\mathcal{U}_{n,m} = \{f \in \mathrm{Diff}^1(M); \bigcup_{k \geq 1} f^k(U_n) \cap U_m \neq \emptyset\}.$$

C'est un ouvert de $\mathrm{Diff}^1(M)$; donc $\mathcal{V}_{n,m} = \mathcal{U}_{n,m} \cup (\mathrm{Diff}^1(M) \backslash \overline{\mathcal{U}_{n,m}})$ est un ouvert dense de $\mathrm{Diff}^1(M)$, donc l'intersection de ces ouverts denses est un G_δ dense G_0 de $\mathrm{Diff}^1(M)$ qui est de Baire.

Soit alors f dans cet ensemble, p et q deux points de M. Il existe $(U_{i_n})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(U_{j_n})_{n \in \mathbf{N}}$ bases de voisinages de p et q extraites de la base d'ouverts initiale. Alors :

- soit $f \in \bigcap_{n,m} \mathcal{U}_{i_n,j_m}$, alors on a : $p\mathcal{R}'_f q$;
- soit il existe (m,n) tel que $f \in \mathrm{Diff}^1(M)\backslash\overline{\mathcal{U}_{i_n,j_m}}$, alors on est dans le deuxième cas de la proposition, en posant : $U = \mathrm{Diff}^1(M)\backslash\overline{\mathcal{U}_{i_n,j_m}}$.

$\square$

Démonstration de la proposition 11 :
(a) Soit $f \in \mathcal{G}$, p et q deux points de M tels qu'il existe z vérifiant : $p\mathcal{R}'_f z$ et $z\mathcal{R}'_f q$. Alors il existe une (α,ω)-chaîne joignant p à q pour f, donc on est dans le cas (ii) du corollaire 4, donc $p\mathcal{R}'_f q$.
(b) On voit facilement que : $K_f(f(x)) \cup \{f(x)\} = K_f(x)$, ce qui avec la transitivité implique le (b). $\square$

Démonstration de la proposition 12 : Il est bien connu que "$\supset$" est une relation d'ordre (partiel).
Supposons que $\{K_i; i \in I\}$ soit une partie non vide totalement ordonnée de $\mathcal{K}_f$. Comme chaque K_i est une partie compacte non vide et que toute intersection finie de K_i est non vide (car la famille est totalement ordonnée), alors $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ est non vide.
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinages ouverts de K : $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Alors, comme pour chaque $n \in \mathbb{N}$ $K \subset U_n$, il existe $I_n \subset I$ finie non vide telle que : $\bigcap_{i\in I_n} K_i \subset U_n$; comme la famille est totalement ordonnée, il existe donc $i_n \in I$ tel que $K_{i_n} \subset U_n$. Quitte à remplacer K_{i_n} par $K_{i_n} \cap K_{i_{n-1}}$ qui est soit K_{i_n}, soit $K_{i_{n-1}}$, on peut supposer que la famille $(K_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
On a alors : $(K_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\{K_i; i \in I\}$ telle que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_{i_n}$.
De plus, comme $K_{i_n} \in \mathcal{K}_f$, il existe $x_n \in M$ tel que $K_{i_n} = K_f(x_n)$; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in M$.
Montrons que $K = K_f(x)$:

- comme $(K_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a : $\forall p \geq n, f(x_p) \in K_{i_n}$. Comme K_{i_n} est compact, on en déduit que $f(x) = \lim_{p\to\infty} f(x_p) \in K_{i_n}$. Aussi, par le (b) de la proposition 11 : $K_f(x) \subset K_{i_n}$ donc $K_f(x) \subset K$;
- comme le graphe de $\mathcal{R}_f$ est fermé, on a : $K \subset K_f(x)$.

$\square$

Démonstration du théorème 13 : Soit $\mathcal{M}_f$ l'ensemble des éléments maximaux de $(\mathcal{K}_f, \supset)$. $\mathcal{M}_f$ est non vide car l'ensemble $\mathcal{K}_f$ est non vide et inductif. De plus, chaque élément de $\mathcal{M}_f$

est non vide et compact. Si K et K' sont deux éléments de $\mathcal{M}_f$ tels que $K \cap K' \neq \emptyset$, soit $x \in K \cap K'$; alors par le (b) de la proposition 11, on a : $K_f(x) \subset K \cap K'$, donc comme K et K' sont des éléments maximaux de $\mathcal{K}$: $K_f(x) = K = K'$. Les éléments de $\mathcal{M}_f$ sont donc bien deux à deux disjoints.

(c) si $x \in M$, l'ensemble $\{K \in \mathcal{K}_f ; K \subset K_f(x)\}$ est aussi inductif, donc a un élément maximal pour "$\supset$" $K_0 \in \mathcal{M}_f$; on a alors : $K_0 \subset K_f(x)$.

(b) Soit $K \in \mathcal{M}_f$. Soit $x \in K$; alors, par le (b) de la proposition 11 : $K_f(x) \subset K$, donc comme K est maximal : $K = K_f(x)$, ce qui donne le b.

(a) Soit $K \in \mathcal{M}_f$. Soit U un voisinage ouvert de K et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable décroissante de voisinages ouverts de K. Supposons que pour chaque n il existe $x_n \in \bigcup_{k\geq 0} f^k(U_n)\backslash U$. Il existe donc $k_n \geq 0$ tel que : $f^{-k_n}x_n \in U_n$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f^{-k_n}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes :

– $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in M\backslash U$;
– $y = \lim_{n\to\infty} f^{-k_n}x_n \in K$.

Aussi $y\mathcal{R}_f x$, donc $x \in K_f(y) \subset K$, ce qui est absurde.

On a donc montré qu'il existe $\mathcal{M}_f \subset \mathcal{K}$ vérifiant les conclusions du théorème 13. Montrons que $\mathcal{M}_f$ est unique. Supposons $\mathcal{M}$ satisfasse les conclusions du théorème 13. Le (a) et le (b) impliquent que $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}_f$: si $K \in \mathcal{M}$, si $x \in K$, alors par le (b) $K \subset K_f(x)$ et par le (a) $K_f(x) \subset K$, donc $K = K_f(x)$. De plus, par le (b), on a : $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_f$. Et si $K \in \mathcal{M}_f$, si $x \in K$, par le (c) il existe $K' \in \mathcal{M}$ tel que $K' \subset K$, mais comme K est maximal, forcément $K = K'$, donc $\mathcal{M} = \mathcal{M}_f$. ∎

Démonstration de la proposition 14 : Le (b) de la proposition 14 vient simplement du fait que les éléments de $\mathcal{M}_f$ sont stables au sens de Liapunov.

(a) Si $K \in \mathcal{M}_f$, K est stable au sens de Liapunov et on peut donc choisir une base décroissante et dénombrable de voisinages ouverts de K, $(U_n(K))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{k\geq 0} f^k(U_{n+1}(K)) \subset U_n(K).$$

On peut aussi imposer : $U_n(K) \subset \{x \in M ; d(x, K) < \frac{1}{n+1}\}$. On pose alors : $U_n = \bigcup_{K\in\mathcal{M}_f} U_n(K)$.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{k\geq 0} f^k(U_{n+1}) \subset U_n.$$

Soit alors $S_n = \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}(U_n)$. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'ouverts. De plus, si $x \in M$, il existe $K \in \mathcal{M}_f$ tel que $K \subset K(x)$, donc pour tout V_x voisinage de x, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_x \cap S_n \neq \emptyset$. Aussi, S_n est dense dans M. $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ est donc un G_δ dense de M. Or, si $x \in G$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k_n \geq 0$ tel que : $f^{k_n}(x) \in U_n$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_{n+1}, f^k(x) \in U_n$. Aussi, si $y \in \omega(x, f)$, on a : $y \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{U_n}$. Or, on a :

$$\bigcap_{n\geq 0} \overline{U_n} \subset \overline{\bigcup_{K\in\mathcal{M}_f} K}.$$

Donc $\omega(x, f) \subset \overline{\bigcup_{K\in\mathcal{M}_f} K}$.

(c) Sous les hypothèses du c, posons pour tout $K \in \mathcal{M}_f$:

$$d_K = d(K, \bigcup_{K'\in\mathcal{M}_f\setminus\{K\}} K') > 0.$$

On choisit alors les $U_n(K)$ comme précédemment, mais en imposant en plus que $U_n(K) \subset \{x; d(x, K) < \frac{d_K}{4}\}$. Alors les $\overline{U_n(K)}$ sont deux à deux disjoints. De plus : si $x \in G$ (défini en (a)), il existe $k \geq 1$ et $K \in \mathcal{M}_f$ tel que $f^k x \in U_2$; alors : $\forall n \geq k, f^n x \in U_1(K)$. Donc si on reprend ce qu'on a fait en (a), on trouve :

$$\omega(x, f) \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{U_n} \cap \overline{U_1(K)} = \bigcap_{n\geq 0} \overline{U_n(K)} = K.$$

$\square$

Démonstration de la proposition 15 : La seconde inclusion est évidente. Elle vient du fait que si $K \in \mathcal{M}$, tout point de K est non errant (c'est le (b) du théorème 13).

Pour montrer la première inclusion, considérons x dans l'intérieur de $\Omega(f)$. Il existe donc U un ouvert contenant x et inclus dans $\Omega(f)$. On sait par le théorème 13 qu'il existe $K \in \mathcal{M}_f$ tel que $K \subset K(x)$. Soit $y \in K$, on a donc $x\mathcal{R}_f y$. Il existe donc une suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers positifs ou nuls et une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} f^{i_n} x_n = y$. Comme $x_n \in U \subset \Omega(f)$, x_n est non errant. Donc il existe $z_n \in U$ et $m_n \geq 0$ tel que : $d(z_n, x_n) < \frac{1}{n}$, $d(f^{i_n} z_n, f^{i_n} x_n) < \frac{1}{n}$ et $d(f^{i_n+m_n} z_n, x_n) < \frac{1}{n}$. On a donc : $\lim_{n\to\infty} f^{i_n} z_n = y$ et $\lim_{n\to\infty} f^{m_n}(f^{i_n} z_n) = x$, donc $y\mathcal{R}_f x$, donc finalement $x \in K(y) = K$. $\square$

6.4 Démonstration des résultats de la section1.4.

Démonstration de la proposition 16 : On utilise encore une fois une base dénombrable $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de M et on fixe $N \geq 1$. On raisonne dans l'ensemble $\mathcal{H}$ des difféomorphismes de M dont tous les points périodiques sont hyperboliques. Soit alors $f \in \mathcal{H}$. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de f tel que tout $g \in \mathcal{U}$ a le même nombre de points périodiques de période inférieure ou égale à N que f et ces points périodiques ainsi que leurs variétés invariantes locales varient continûment avec $g \in \mathcal{U}$. Notons p_g l'un de ces points périodiques et définissons pour $(n,k) \in \mathbf{N}^2$:

$$\mathcal{U}_{n,k} = \{g \in \mathcal{U}; \bigcup_{j\geq 1} f^j(U_k \cap W^u_{\mathrm{loc}}(p_g, g)) \cap U_n \neq \emptyset\}.$$

$\mathcal{U}_{n,k}$ est un ouvert de $\mathcal{U}$, donc $\mathcal{V}_{n,k} = \mathcal{U}_{n,k} \cup (\mathcal{U}\backslash\overline{\mathcal{U}_{n,k}})$ est un ouvert dense de $\mathcal{U}$. Soit alors $g \in \mathcal{V}_{n,k}$. Deux cas peuvent se produire :

- soit $g \in \mathcal{U}_{n,k}$; alors $\bigcup_{j\geq 1} g^j(U_k \cap W^u_{\mathrm{loc}}(p_g, g)) \cap U_n \neq \emptyset$;
- soit $g \in \mathcal{U}\backslash\overline{\mathcal{U}_{n,k}}$. Supposons alors qu'il existe $q_1 \in U_k \cap W^u_{\mathrm{loc}}(p_g, g)$ et $q_2 \in U_n$ tels que $q_1 \mathcal{R}_g q_2$ (i.e. $q_2 \in F(q_1, g)$). On peut alors appliquer la proposition 6 qui donne $h \in \mathcal{U}\backslash\overline{\mathcal{U}_{n,k}}$ tel que $q_1 \in W^u_{\mathrm{loc}}(p_h, h) \cap U_k$ et $\bigcup_{j\geq 1}(h^j(U_k \cap W^u_{\mathrm{loc}}(p_h, h)) \cap U_n \neq \emptyset$; alors $h \in \mathcal{U}_{n,k} \cap (\mathcal{U}\backslash\mathcal{U}_{n,k}) = \emptyset$, ce qui est impossible. Aussi, on a finalement :
$$\forall q_1 \in W^u(p_g, g) \cap U_k, \forall q_2 \in U_n, q_2 \notin K_g(q_1).$$

On peut alors faire l'intersection sur les n, k, ce qui nous donne un G_δ dense de $\mathcal{U}$ dont tout élément f vérifie : pour tout $(k,n) \in \mathbf{N}^2$, on a :

- soit $\bigcup_{j\geq 1}(f^j(U_k \cap W^u(p_f, f)) \cap U_n \neq \emptyset$;
- soit :
$$\forall q_1 \in W^u(p_f, f) \cap U_k, \forall q_2 \in U_n, q_2 \notin K_f(q_1).$$

Alors, pour chaque $N \geq 1$, on peut recouvrir l'ensemble $\mathcal{H}$ par des ouverts $\mathcal{U}$ tels que sur chaque ouvert $\mathcal{U}$, l'ensemble des points périodiques de période inférieure ou égale à N d'un élément de $\mathcal{U}$ dépend continûment du difféomorphisme (ainsi que ses variétés stables et instables). Le résultat précédent permet de trouver des G_δ de tels ouverts, donc finalement un G_δ dense de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel que pour tout point périodique de période inférieure ou égale à N d'un élément f de ce G_δ, on a les conditions énoncées ci-dessus à l'aide de la base d'ouverts. Faisant ensuite une intersection dénombrable sur N, on trouve un G_δ $\mathcal{G}_1$ dense d'élements de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tel qu'on a la condition en tout point périodique.

En particulier, si $f \in \mathcal{G}_1$, si p est un point périodique de f, si $n \in \mathbf{N}$, on a :

- soit $W^u(O(p,f),f) \cap U_n \neq \emptyset$;
- soit : $K_f(p) \cap U_n = \emptyset$ (car si $K_f(p) \cap U_n \neq \emptyset$, alors il existe $q \in W^u_{\text{loc}}(p,f)$ tel que $K_f(q) \cap U_n \neq \emptyset$).

En d'autres termes, on obtient : $\overline{W^u_{\text{loc}}(O(p,f),f)} = K_f(p)$, soit le premier point de la proposition 16 que l'on voulait démontrer.

Fixons $f \in \mathcal{G}_1$. On définit alors l'ensemble suivant :

$$G = \{q \in W^u_{\text{loc}}(O(p,f),f); \forall n \in \mathbf{N}, (O_+(q,f) \cap U_n \neq \emptyset \quad \text{ou}$$

$$\exists V \quad \text{voisinage} \quad \text{de} \quad q, \forall q_1 \in V, \forall q_2 \in U_n, q_2 \notin K_f(q_1))\}$$

G est alors clairement un G_δ de $W^u_{\text{loc}}(O(p,f),f)$, et est dense par ce qui précède. On obtient alors : pour tout $q \in G$, $\overline{O_+(q,f)} = K_f(q)$, ce qui donne le deuxième point de la proposition 16. $\square$

Nous ne démontrons pas la proposition 17, qui se déduit de la proposition 7 comme la proposition 16 se déduisait de la proposition 6.

Démonstration de la proposition 18 : Nous reprenons les mêmes notations que dans le début de la démonstration de la proposition 16 . On fixe donc comme dans le démonstration de cette proposition $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $\mathcal{U}$, p_g et q_g deux points périodiques dépendant continûment de $g \in \mathcal{U}$ et on pose pour tout entier i :

$$\mathcal{U}_i = \{f \in \mathcal{U}; U_i \cap W^u(O(p_f,f),f) \sqcap W^s(O(q_f,f),f) \backslash O(p_f,f) \neq \emptyset\}$$

où l'on conviendra que "$\sqcap$" désigne une intersection transverse (donc qui demeure par perturbation).

$\mathcal{U}_i$ étant ouvert, l'ensemble $\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i \cup (\mathcal{U} \backslash \overline{\mathcal{U}}_i)$ est dense dans $\mathcal{U}$.

Soit alors $f \in \mathcal{V}_i \cap \mathcal{H}$. Deux cas peuvent se produire :

- soit $U_i \cap (W^u(O(p_f,f),f) \sqcap W^s(O(q_f,f),f)) \neq \emptyset$;
- soit $f \in (\mathcal{U} \backslash \overline{\mathcal{U}}_i) \cap \mathcal{H}$. Supposons qu'il existe $p \in U_i \cap F(p_f,f) \cap B(q_f,f)$. Alors, par la proposition 8, il existe $g \in \mathcal{U} \backslash \overline{\mathcal{U}}_i$ tel que $p_f = p_g$, $q_f = q_g$ et $U_i \cap W^u(O(p_g),g) \cap W^s(O(q_g),g) \neq \emptyset$; on peut alors, quitte à reperturber g, rendre l'intersection hétérocline transverse. On a alors : $g \in \mathcal{U}_i \cap (\mathcal{U} \backslash \mathcal{U}_i)$, ce qui est impossible.

Comme dans la démonstration de la proposition 16, on fait ensuite l'intersection sur les $i \in \mathbf{N}$, puis la réunion sur les ouverts $\mathcal{U}$, puis l'intersection sur les N. On obtient finalement un G_δ de $\text{Diff}^1(M)$ qui, intersecté avec $\mathcal{H}$, donne encore un G_δ noté $\mathcal{G}_3$ tel que pour tout $f \in \mathcal{G}_3$, si p et q sont deux points hyperboliques de f, si $p' \in \overline{W^u(O(p_1,f),f)} \cap \overline{W^s(O(p_2,f),f)}$, alors comme dans ce cas $p' \in F(p,f) \cap B(q,f)$, on a : tout voisinage de p' contient une intersection transverse de $W^u(O(p,f),f)$ avec $W^s(O(q,f),f)$, ce qui donne bien le résultat souhaité. $\square$

démonstration du corollaire 19 : On considère l'intersection des G_δ définis précédents, intersectés de plus avec le G_δ des difféomorphismes dont toutes les intersections hétéroclines sont transverses, intersecté aussi avec le G_δ $\mathcal{G}_1^{-1}$. On note le G_δ ainsi obtenu $\mathcal{G}_4$. Soit alors f dans $\mathcal{G}_4$ et p un point hyperbolique périodique de f. Il est alors connu (cela résulte du λ-lemma) que $\overline{W^u(O(p,f),f) \cap W^s(O(p,f),f)}$ est transitif.
Supposons alors que K soit un compact invariant transitif de f contenant p. On a alors : $\forall q \in K, p\mathcal{R}_f q$ et $q\mathcal{R}_f p$. Aussi, comme $f \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_1^{-1}$ et par la proposition 16, $q \in \overline{W^u(O(p,f),f)} \cap \overline{W^s(O(p,f),f)}$; aussi, $K \subset \overline{W^u(O(p,f),f)} \cap \overline{W^s(O(p,f),f)}$. On peut alors appliquer la proposition 18 qui nous dit que :

$$\overline{W^u(O(p,f),f)} \cap \overline{W^s(O(p,f),f)} = \overline{W^u(O(p,f),f) \cap W^s(O(p,f),f)};$$

donc que $K \subset \overline{W^u(O(p,f),f) \cap W^s(O(p,f),f)}$. $\square$

La démonstration de la proposition 20 est sans difficulté et découle des propositions précédentes.

Bibliographie.

[1] M. -C. Arnaud *Un lemme de fermeture d'orbites : le "orbit closing lemma",* C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 323, No11, (1996), 1175-1178.

[2] M. -C. Arnaud *Le "closing lemma" en topologie* C^1, Mem. Soc. Math. Fr. Nouv. Serie 74 (1998) 126p.

[3] M. -C. Arnaud *Création de connexions en topologie* C^1 *pour les flots des surfaces*, Bol. Soc. Bras. Mat. 30 (1998) p. 335-366.

[4] C. Bonatti & L. Diaz *Persistent non hyperbolic transitive diffeomorphisms*, Ann. Math. 143 (1996), p. 357-396.

[5] C. Bonatti & L. Diaz *Connexions hétéroclines et générécité d'une infinité de puits et de sources*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 32 (1999), p. 135-150.

[6] C. Bonatti & L. Diaz & E. Pujals *A* C^1*-generic dichotomy for diffeomorphisms : weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources* (1999) preprint.

[7] S. Hayashi *Hyperbolicity, stability, and the creation of homoclinic points*, Documenta Mathematica, Extra Vol. ICM 1998 II (1998), p. 789-796.

[8] S. Hayashi *Connecting invariant manifolds and the solution of the* C^1 *stability and* Ω*-stability conjectures for flows*, Ann. Math. 145 (1997), p.81-137.

[9] J. Mai *A simpler proof of* C^1 *closing lemma* Chinese Science Bull. 34-3 (1989), p.180-184.

[10] R. Mané *An ergodic closing lemma*, Ann. Math. 116 (1982), p.503-540.

[11] R. Mané *A proof of the* C^1 *stability conjecture* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 66 (1988) p161-210.

[12] M.-L. Peixoto *The closing lemma for generalized recurrence in the plane*, Trans. Am. Math. Soc. 308, No1, (1988) p.143-158.

[13] M. L. Peixoto, C. Pugh *The planar closing lemma for chain recurrence*, Trans. Am. Soc. 341, No 1 (1994), 173-192.

[14] C. Pugh *On arbitrary sequences of isomorphisms in* $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ Trans. Amer. math. Soc. 184 (1973) 387-400.

[15] C. Pugh *The* C^1 *connecting lemma*, J. Dyn. Differ. equations 4 No 4, (1992), 545-553.

[16] C. Pugh & C. Robinson *The* C^1 *closing lemma, including Hamiltonians*, Erg. Th. and Dyn. Syst. 3 (1983), p. 261-314.

[17] L. Wen & Z. Xia *A basic* C^1 *perturbation theorem*, J. Diff. Eq. 154 (1999) p. 267-283.

[18] L. Wen & Z. Xia *A simpler proof for the* C^1 *connecting lemma*, Preprint.